

# Geometría de Cartan de coordenadas polares en un plano: propiedades de la aceleración y de la resonancia de Euler Bernoulli.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,  
Civil List y AIAS

([www.aias.us](http://www.aias.us), [www.webarchive.org.uk](http://www.webarchive.org.uk), [www.atomicprecision.com](http://www.atomicprecision.com), [www.upitec.org](http://www.upitec.org),  
[www.et3m.net](http://www.et3m.net))

Traducción: Alex Hill ([www.et3m.net](http://www.et3m.net))

## Resumen.

Se expresan los elementos fundamentales de la cinemática clásica en términos de la geometría de Cartan y se descubren varios nuevos resultados que poseen consistencia interna. Se expresan las energías cinética, potencial y total en términos de cinemática general, junto con la cinemática reunida de las trayectorias hiperbólica y logarítmica, describiendo así las principales características de las galaxias en espiral. Se aplica un análisis de Frenet para encontrar que la curvatura de Frenet de todas las órbitas planas es la relación entre las velocidades lineal y angular, y que la torsión de Frenet desaparece para todas las órbitas planas. La aceleración debida a la gravitación se expresa en coordenadas polares en un plano y se analizan las propiedades de la aceleración centripeta. En general, la aceleración es una derivada covariante de Cartan cuya conexión de espín es el vector de velocidad angular. Esto se cumple para el vector general. Se demuestra que la aceleración, expresada mediante coordenadas polares en un plano, produce resonancia de Euler Bernoulli cuando hay presente una fuerza impulsora. Este resultado puede traducirse a teoría de circuitos y aplicarse a la teoría de la energía proveniente del espacio-tiempo.

*Palabras clave:* Teoría ECE, cinemática, galaxias en espiral, teoría orbital, propiedades de la aceleración, resonancia de Euler Bernoulli, teoría de circuitos, energía del espacio-tiempo.

## 1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie [1 – 10] se ha aplicado la teoría ECE a la cinemática fundamental clásica, y se ha demostrado que la velocidad angular es la conexión de espín de Cartan. Se demuestra en este documento que el sistema de coordenadas polares en un plano es capaz de producir resultados fundamentales en la física, los cuales no existen en el sistema cartesiano. Ejemplos de ello son las aceleraciones de Coriolis y centrífuga, así como la resonancia de Euler Bernoulli. El motivo de esta situación es que las coordenadas polares en un plano están rotando, en tanto que las coordenadas cartesianas están estáticas. Como es habitual, este documento resume extensos cálculos que se incluyen en las notas de acompañamiento al documento UFT237 en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us). En la Sección 2, se desarrolla en forma sistemática la cinemática fundamental para obtener expresiones para la velocidad, la energía cinética, la energía potencial y la energía total o hamiltoniano. Los resultados se aplican en la demostración de que las principales características de la galaxia en espiral pueden explicarse mediante una órbita en forma de espiral hiperbólica, pero ello no sucede con una órbita en forma de espiral logarítmica. Se incluyen la cinemática completa de ambos tipos de órbitas en las notas de acompañamiento, junto con material adicional referido a varios tipos de espirales de Cotes y Poincot. Se desarrolla la cinemática mediante el sistema de Frenet [11] de coordenadas y se demuestra que la curvatura de Frenet es la relación entre las velocidades lineal y angular para todas las órbitas planas. Se demuestra que la torsión de Frenet desaparece para todas las órbitas en un plano. La curvatura y torsión de Frenet no deben confundirse con la curvatura y torsión de Cartan. Se subraya el hecho de que la aceleración debida a la gravitación produce los términos de Coriolis y centrífuga en el sistema polar en un plano. La descripción de una órbita elíptica, por ejemplo, depende del sistema de coordenadas utilizado. En general, la velocidad y la aceleración en coordenadas polares en un plano son derivadas covariantes de Cartan, las cuales se desarrollan con todo detalle y con una completa consistencia interna. Finalmente, en la Sección 2 se demuestra que la resonancia de Euler Bernoulli puede inducirse en las coordenadas polares en un plano aun cuando la misma se encuentra ausente en un sistema de coordenadas cartesianas.

En la Sección 3, los resultados de la resonancia de Euler Bernoulli se traducen en términos de teoría de circuitos, y es posible construir un circuito en el cual la fuerza impulsora se origina en el espacio-tiempo. De manera que es posible obtener energía a partir del espacio-tiempo.

## 2. Desarrollo de la cinemática.

La derivada covariante de Cartan puede definirse para su empleo en cinemática clásica en el espacio. Para cualquier vector  $V$  la derivada covariante es:

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{ejes fijos}} + \underline{\omega} \times \underline{V}$$

(1)

donde el vector de conexión de espín es el vector de velocidad angular  $\underline{\omega}$ . Definimos en coordenadas polares en un plano:

$$\underline{v} = v \underline{e}_r \quad (2)$$

Por simplicidad de desarrollo. La velocidad entonces se define como:

$$\underline{v} = \frac{D\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (3)$$

donde:

$$\frac{dr}{dt} := \left( \frac{dr}{dt} \right)_{\text{ejes fijos}} \quad (4)$$

Por definición [11, 12]:

$$\frac{D\underline{r}}{dt} = \frac{D}{dt} (r \underline{e}_r) = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} \quad (5)$$

de manera que

$$\left( \frac{d\underline{e}_r}{dt} \right)_{\text{ejes fijos}} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r \quad (6)$$

y:

$$\underline{\omega} \times \underline{r} = r \frac{d\underline{e}_r}{dt} \quad (7)$$

La aceleración se define como:

$$\underline{a} = \frac{D\underline{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{v} \quad (8)$$

donde:

$$\frac{dv}{dt} = \left( \frac{dv}{dt} \right)_{\text{ejes fijos}} \quad (9)$$

A partir de cinemática fundamental, al igual que en los documentos previos de esta serie:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{v} = (\ddot{r} - \underline{\omega}^2 r) \underline{e}_r + \left( r \frac{d\underline{\omega}}{dt} + 2 \frac{dr}{dt} \underline{\omega} \right) \underline{e}_\theta \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + r \frac{d\underline{\omega}}{dt} \underline{e}_\theta + 2 \frac{dr}{dt} \underline{\omega} \underline{e}_\theta \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $\underline{e}_r$  y  $\underline{e}_\theta$  son los vectores unitarios [11] el sistema de coordenadas polares en un plano:

$$\underline{e}_r \times \underline{e}_\theta = \underline{k}$$

$$\underline{k} \times \underline{e}_r = \underline{e}_\theta \quad (11)$$

$$\underline{e}_\theta \times \underline{k} = \underline{e}_r$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{v} &= \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + r \frac{d\underline{\omega}}{dt} (\underline{k} \times \underline{e}_r) + 2 \frac{dr}{dt} \underline{\omega} (\underline{k} \times \underline{e}_r) \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + 2 \underline{\omega} \times \left( \frac{dr}{dt} \underline{e}_r \right) \end{aligned} \quad (12)$$

A partir de la Ec. (3):

$$\underline{v} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (13)$$

de manera que en la Ec. (8):

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r} \right) \substack{\text{ejes} \\ \text{fijos}} + \underline{\omega} \times \left( \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r} \right) \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \left( \frac{dr}{dt} \underline{e}_r \right) \substack{\text{ejes} \\ \text{fijos}} + \underline{\omega} \times \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \end{aligned} \quad (14)$$

En esta ecuación:

$$\underline{\omega} \times \left( \frac{dr}{dt} \underline{e}_r \right) \substack{\text{ejes} \\ \text{fijos}} = \underline{\omega} \times \frac{dr}{dt} \underline{e}_r \quad (15)$$

de manera que:

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + 2\underline{\omega} \times \left( \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r \right) \quad (16)$$

que es la Ec. (12), QED. Las derivadas covariantes utilizadas en estos cálculos son ejemplos de la derivada covariante de Cartan [1 - 10]:

$$D_{\mu} V^a = \partial_{\mu} V^a + \omega_{\mu b}^a V^b \quad (17)$$

Se observa que la bien conocida [12] aceleración centripeta:

$$\underline{a}_{\text{centripeta}} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \quad (18)$$

y la aceleración de Coriolis:

$$\underline{a}_{\text{Coriolis}} = \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + 2\underline{\omega} \times \left( \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r \right) \quad (19)$$

se producen a partir del sistema de coordenadas polares en un plano. Estas aceleraciones no existen en el sistema de coordenadas polares en un plano, y dependen íntegramente de la existencia de una conexión de espín de Cartan. La teoría integra del movimiento rotacional clásico depende de la conexión de espín. En documentos previos se demostró que la aceleración de Coriolis desaparece para todas las órbitas cerradas en un plano. Estos pueden ser órbitas en el campo de la astronomía o en un banco de laboratorio. En este caso, la aceleración en el sistema de coordenadas polares en un plano se simplifica a:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (\ddot{r} - \dot{\omega}^2 r) \underline{e}_r = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \dot{\omega}^2 r \right) \underline{e}_r \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \end{aligned} \quad (20)$$

Por ejemplo [12] la aceleración debida a la gravitación en el sistema polar en un plano es:

$$\underline{g} = \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \quad (21)$$

e incluye la aceleración centripeta:

$$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = -\omega^2 \underline{r} \underline{e}_r \quad (22)$$

Por lo tanto,  $\underline{g}$  no se dirige normalmente hacia la superficie de la Tierra, debido a la aceleración centrípeta causada por la velocidad angular de la Tierra. La  $\underline{g}$  en el sistema polar en un plano es la suma de  $\underline{g}$  en el sistema cartesiano:

$$\underline{g}(\text{Cartesiano}) = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \underline{e}_r \quad (23)$$

y la aceleración centrípeta. Para clarificar aún más este punto, consideremos la aceleración de una órbita elíptica, o una trayectoria elíptica cerrada en el sistema polar un plano. Se ha demostrado en trabajos anteriores que es igual a:

$$\underline{a} = -\frac{L^2}{m^2 r^3} \underline{e}_r \quad (24)$$

donde el momento angular es una constante de movimiento y se define mediante:

$$L = |\underline{L}| = |\underline{r} \times \underline{p}| = m r^2 \omega \quad (25)$$

Aquí,  $m$  es la masa de un objeto que se mueve a lo largo de una órbita otra victoria, y  $r$  es la distancia entre un foco de la elipse y el objeto. El símbolo  $\alpha$  representa la semi latitud recta, o semi latus rectum de la elipse. De manera que la aceleración debida a la gravedad generada por el movimiento elíptico de la masa  $m$  es:

$$\underline{a} = -\frac{L^2}{m^2 r^3} \underline{e}_r \quad (26)$$

en coordenadas polares en un plano. Para recuperar el resultado newtoniano [12]:

$$\alpha = \frac{L^2}{m^2 M G} \quad (27)$$

donde  $M$  es la masa de un objeto ubicado en el foco de la elipse y  $G$  es la constante de Newton. A partir de la afirmación (27) la Ec. (26) deviene:

$$\underline{a} = -\frac{M G}{r^2} \underline{e}_r \quad (28)$$

La fuerza se define a partir de la Ec. (28) como:

$$\underline{F} = m\underline{g} = -\frac{mMG}{r^2} \underline{e}_r \quad (29)$$

Esta es la única fuerza presente en el sistema de coordenadas polares en un plano.

La aceleración en el sistema cartesiano de coordenadas, a partir de la Ec.(21) es:

$$\underline{a}(\text{Cartesiana}) = \underline{g} - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \quad (30)$$

en donde la aceleración centrífuga es:

$$-\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \omega^2 r \underline{e}_r. \quad (31)$$

Por lo tanto, en el sistema cartesiano la aceleración producida por la misma trayectoria elíptica es:

$$\left(\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}\right)_{\text{Cartesiana}} \underline{e}_r = \left(-\frac{L^2}{r^2 \alpha} + \omega^2 r\right) \underline{e}_r \quad (32)$$

y éste es un resultado cinemático con validez general. Generaliza la teoría newtoniana, que se obtiene nuevamente a partir de la Ec.(27) para dar:

$$\left(\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}\right)_{\text{Cartesiana}} \underline{e}_r = \left(-\frac{MG}{r^2} + \omega^2 r\right) \underline{e}_r = \left(-\frac{MG}{r^2} + \frac{L^2}{m^2 r^3}\right) \underline{e}_r \quad (33)$$

y la conocida fuerza:

$$\underline{F} = m \left(\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}\right)_{\text{Cartesiana}} \underline{e}_r = \left(-\frac{mMG}{r^2} + \frac{L^2}{m r^3}\right) \underline{e}_r \quad (34)$$

de los libros de texto [12]. A partir de una comparación entre las Ecs. (29) y (34) se observa que las fuerzas representadas en el sistema de coordenadas polares en un plano y en el sistema cartesiano son diferentes. Si el marco de referencia es estático con respecto al observador, la fuerza se define a través de la Ec. (34). Si el marco de referencia está rotando con respecto al observador, la fuerza se define a través de la Ec.(29).

La forma más sencilla de enfocar este análisis siempre consiste en el cálculo inicial en coordenadas polares en un plano, y en descubrir que un término de la expresión resultante es la aceleración en el sistema cartesiano. Para un observador ubicado en la Tierra que gira alrededor del Sol, la expresión relevante es aquella del marco cartesiano, porque éste último también se encuentra fijo en la Tierra y no se mueve con respecto al observador. En

otras palabras, el observador se encuentra en su propio marco de referencia. Para un observador ubicado en el Sol, la expresión relevante es aquella del sistema de coordenadas polares en un plano, porque la Tierra rota a lo largo de su órbita con respecto al observador.

El observador ubicado en la Tierra experimenta la aceleración centrífuga:

$$-\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \omega^2 \underline{r} \underline{e}_r \quad (35)$$

dirigida hacia afuera de la Tierra. Este es el origen de la fuerza centrífuga cotidiana. El observador ubicado en el Sol experimenta la aceleración centripeta:

$$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = -\omega^2 \underline{r} \underline{e}_r \quad (36)$$

dirigida hacia el Sol y hacia el observador. La totalidad del análisis se apoya en la conexión de espín y en el hecho de que en el sistema de coordenadas polares en un plano el marco de referencia mismo rota y, en consecuencia, genera por definición la conexión de espín.

Se demostró en documentos previos que para cualquier órbita plana la fuerza en el sistema de coordenadas polares en un plano es:

$$\underline{F} = -\frac{L^2}{m r^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r \quad (37)$$

Un resultado que se obtiene puramente a partir de la cinemática y que es más general que la teoría newtoniana. El resultado (37) es consistente con la teoría lagrangiana [12] e incluye la aceleración centripeta, la cual aparece como el segundo término a la derecha de la igualdad en la Ec. (37).

La Ec. (37) resulta muy útil porque expresa la ley de fuerza para cualquier órbita cerrada y en un plano, o cualquier trayectoria plana y cerrada en una banca de laboratorio. Una ecuación similar puede utilizarse para la velocidad. En coordenadas polares en un plano, la velocidad es [11, 12]:

$$\underline{v} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \omega r \underline{e}_\theta = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r}. \quad (38)$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta}, \quad (39)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\omega r^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (40)$$



se obtiene que la velocidad en coordenadas polares en un plano puede expresarse como

$$\begin{aligned}\underline{v} &= \omega r \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r + \omega r \underline{e}_\theta \\ &= \left( \frac{L}{m} \right) \left( \frac{1}{r} \underline{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r \right)\end{aligned}\quad (41)$$

para cualquier órbita plana. La energía cinética de cualquier órbita plana es, por lo tanto:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{L^2}{2m} \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right)^2 \right) \quad (42)$$

La energía potencial se define mediante la fuerza [12]:

$$F = - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (43)$$

de manera que:

$$U = \int \frac{L^2}{m r^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) dr. \quad (44)$$

La energía cinética se define en general mediante la integral de trabajo [12]:

$$W_{12} = \int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} = T_2 - T_1 \quad (45)$$

y si

$$T_1 = 0 \quad (46)$$

entonces

$$W = T = \left( \int \underline{F} \cdot d\underline{r} \right)_{\text{cinética}} \quad (47)$$

De manera que la energía total es:

$$\underline{E} = H = \left( \int \underline{F} \cdot d\underline{r} \right)_{\text{cinética}} - \left( \int \underline{F} \cdot d\underline{r} \right)_{\text{potencial}} = \text{constante} \quad (48)$$

En otras palabras, la energía total se debe por completo a integrales sobre la fuerza y, por lo tanto, sobre la aceleración. Nuevamente en este contexto la cinemática fundamental es más general que la teoría newtoniana. La energía cinética es, por lo tanto:

$$T = W = \int \frac{d}{dt}(m\underline{v}) \cdot d\underline{r} \quad (49)$$

donde

$$d\underline{r} = \underline{v} dt \quad (50)$$

de manera que obtenemos el resultado conocido:

$$T = W = \int \left( \frac{d}{dt} m\underline{v} \right) \cdot \underline{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt} (\underline{v} \cdot \underline{v}) dt = \frac{1}{2} m v^2 \quad (51)$$

La energía potencial se define como:

$$W = U_1 - U_2 = \int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad (52)$$

y es el trabajo realizado [12] al mover una masa  $m$  desde 1 hasta 2. La Ec. (52) implica:

$$\underline{F} = -\nabla U \quad (53)$$

de manera que:

$$\int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} = - \int_1^2 (\nabla U) \cdot d\underline{r} = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2 \quad (54)$$

QED. Se observa que las definiciones fundamentales de la energía cinética y potencial se obtienen a partir del principio de equivalencia:

$$\underline{F} = m \frac{d\underline{v}}{dt} = -\nabla U \quad (55)$$

el cual en trabajos previos se dedujo y demostró a partir de las leyes de antisimetría de la

teoría ECE.

De manera que en cinemática general:

$$H = E = \left( \int \underline{F} \cdot d\underline{r} \right)_{\text{cinética}} + \left( \int \underline{F} \cdot d\underline{r} \right)_{\text{potencial}} \quad (56)$$

donde:

$$\left( \int \underline{F} \cdot d\underline{r} \right)_{\text{cinética}} = \int m \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot d\underline{r} \quad (57)$$

y

$$\left( \int \underline{F} \cdot d\underline{r} \right)_{\text{potencial}} = - \int \nabla U \cdot d\underline{r} \quad (58)$$

En el caso de una órbita elíptica cerrada:

$$H = E = \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - \frac{L^2}{m \alpha r} \quad (59)$$

una ecuación que, nuevamente, es el resultado de las cinemática fundamental. Puede demostrarse como sigue que la Ec. (59) para la energía total, o hamiltoniano, es la ecuación de una elipse. En primer lugar se utiliza la regla de la cadena:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dr}{d\theta} \quad (60)$$

y la definición:

$$L = m \omega r^2 \quad (61)$$

para hallar que:

$$E = \frac{L^2}{2 m r^4} \left( \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right) - \frac{L^2}{m \alpha r} \quad (62)$$

La elipse, en coordenadas polares en un plano, es:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (63)$$

donde  $\epsilon$  es la elipticidad [12]. A partir de la Ec. (63):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{\epsilon r^2}{\alpha}\right)^2 \sin^2 \theta = \left(\frac{\epsilon r^2}{\alpha}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\alpha}{r} - 1\right)^2\right) \\ &= \frac{r^4}{\alpha^2} (\epsilon^2 - 1) + 2r^2 \left(\frac{r}{\alpha}\right) - r^2 \end{aligned} \quad (64)$$

Utilizando la Ec. (64) en la Ec. (62):

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{m} \left[ \frac{1}{2r^4} \left( \frac{r^4}{\alpha^2} (\epsilon^2 - 1) + \frac{2r^3}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha r} \right] \\ &= (\epsilon^2 - 1) \frac{L^2}{2m\alpha^2} \end{aligned} \quad (65)$$

De manera que la Ec. (59) y la Ec. (63) son ambas elipses si

$$\frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha} = \frac{2mE}{L} \quad (66)$$

Por lo tanto, la energía total es:

$$H = E = T + U = \frac{L^2}{2m} \left( \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right) \quad (67)$$

\* y es una constante de movimiento junto con el momento angular total  $L$ . Nótese cuidadosamente que el resultado (66) es más general que la teoría newtoniana, y es válido para todas las secciones cónicas.

Las notas de acompañamiento 237(3) y 237(4) publicadas en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) junto con el documento UFT237 ilustran este punto, al desarrollar la cinemática completa de las espirales hiperbólicas y logarítmicas utilizando las ecuaciones anteriores. En esta forma se demuestra fácilmente de las principales características de la galaxia en espiral pueden describirse mediante estrellas que emergen a partir del centro de una espiral hiperbólica. Las estrellas alcanzan una velocidad constante para un valor infinito de  $r$  - la conocida curva de velocidad. Tanto la teoría newtoniana como la einsteiniana son incapaces de describir este resultado, como es bien sabido. La cinemática fundamental de esta sección lo describe en

forma consistente y elegante. Por otro lado, las estrellas en una espiral logarítmica o en otro tipo de espiral no pueden explicar en absoluto las curvas de velocidad. Por ejemplo, las notas de acompañamiento 237(5) describen las espirales de Cotes y Poinsot, y se descubre que la elipse con precesión es un tipo de espiral de Poinsot sumada a una constante.

El análisis anterior puede desarrollarse con las bien conocidas [11] ecuaciones de Frenet de la geometría diferencial para obtener nuevos detalles. En el análisis de Frenet se parametriza una curva como sigue:

$$\underline{r} = \underline{r}(s) \quad (68)$$

Los vectores unitarios tangente y normal se definen como [11]:

$$\underline{T} = \frac{d\underline{r}}{ds}, \quad \underline{N} = \int \frac{d\underline{T}}{ds} \quad (69)$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura. En las coordenadas polares en un plano [11]:

$$\underline{r} = r \cos\theta \underline{i} + r \sin\theta \underline{j} \quad (70)$$

Ahora definimos:

$$s = r \quad (71)$$

de manera que:

$$\underline{T} = \frac{d\underline{r}}{dr} = \cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j} = \underline{e}_r \quad (72)$$

El vector unitario normal se define como:

$$\underline{N} = \int \frac{d\underline{T}}{dr} = \int \frac{d\underline{T}}{d\theta} \frac{d\theta}{dr} = \int \frac{d\theta}{dr} \underline{e}_\theta \quad (73)$$

Sin embargo,  $\underline{N}$  y  $\underline{e}_\theta$  son vectores unitarios, de manera que la curvatura de Frenet en el sistema de coordenadas polares en un plano es:

$$\rho = \frac{dr}{d\theta} \quad (74)$$

Se llega así al importante resultado de que la curvatura de Frenet de cualquier órbita plana puede calcularse a partir de la Ec. (74). Además, se descubre que:

$$\underline{T} = \underline{e}_r, \quad \underline{N} = \underline{e}_\theta. \quad (75)$$

La velocidad se define mediante:

$$\begin{aligned} \underline{v} &= v \underline{e}_r + r\omega \underline{e}_\theta \\ &= v \underline{T} + r \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} \underline{N} \\ &= v \underline{T} + \frac{vr}{\rho} \underline{N} \end{aligned} \quad (76)$$

El vector unitario binormal de Frenet se define en coordenadas polares en un plano mediante:

$$\underline{B} = \underline{T} \times \underline{N} = \underline{e}_r \times \underline{e}_\theta = \underline{k}. \quad (77)$$

La tercera la fórmula de Frenet [11] es:

$$\frac{d\underline{N}}{ds} = \tau \underline{B} - \frac{1}{\rho} \underline{T} \quad (78)$$

donde  $\tau$  es la torsión de Frenet. De manera que:

$$\frac{d\underline{e}_\theta}{dr} = \tau \underline{k} - \frac{1}{\rho} \underline{e}_r = \frac{d\underline{e}_\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = -\frac{\omega}{v} \underline{e}_r \quad (79)$$

Se obtiene entonces que:

$$\rho = \frac{v}{\omega}, \quad \tau = 0 \quad (80)$$

para todas las órbitas planas. Para una órbita circular:

$$\rho = r \quad (81)$$

Puede obtenerse el mismo resultado utilizando la regla de la cadena como sigue:

$$\omega = \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{v}{\rho} \quad (82)$$

La aceleración en coordenadas polares en un plano es:

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r\omega^2) \underline{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \underline{e}_\theta \quad (83)$$

Una expresión que puede desarrollarse utilizando la definición en el análisis de Frenet de las componentes tangencial y normal de la velocidad:

$$\underline{v} = v_T \underline{T} + v_N \underline{N} \quad (84)$$

es decir

$$v_T = \frac{dr}{dt}, \quad v_N = r\omega \quad (85)$$

La aceleración tangencial es:

$$\begin{aligned} \underline{a}_T &= \ddot{r} \underline{e}_r + \dot{r}\dot{\theta} \underline{e}_\theta = \frac{dv}{dt} \underline{T} + \frac{v^2}{\rho} \underline{N} \\ &= d(v_T)/dt \end{aligned} \quad (86)$$

y la aceleración normal es:

$$\underline{a}_N = \frac{d}{dt} \left( \frac{v r}{\rho} \underline{N} \right) = -\omega^2 r \underline{T} + \frac{d}{dt} (r\omega) \underline{N} \quad (87)$$

Nótese que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v}{\rho} \right) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dv}{dt} - \frac{v}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (88)$$

de manera que:

$$\frac{d}{dt}(\omega r) = \omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} - \frac{rv}{r^2} \frac{dr}{dt} \quad (89)$$

para cualquier órbita en un plano. Por lo tanto:

$$\underline{a}_T = \ddot{r} \underline{T} + \dot{r} \dot{\theta} \underline{N} = \ddot{r} \underline{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \underline{e}_\theta \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_N &= -\omega^2 r \underline{T} + (r\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 r) \underline{N} \\ &= -\omega^2 r \underline{e}_r + (r\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 r) \underline{e}_\theta \end{aligned} \quad (91)$$

La aceleración en el sistema Frenet es, por lo tanto:

$$\underline{a} = \underline{a}_T + \underline{a}_N = \ddot{r} \underline{T} - \omega^2 r \underline{T} + (r\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 r) \underline{N} \quad (92)$$

El término cartesiano en esta expresión es:

$$\underline{a}_{\text{(cartesiano)}} = \ddot{r} \underline{T} \quad (93)$$

La aceleración centrípeta es:

$$\underline{a}_{\text{(centrípeta)}} = -\omega^2 r \underline{T} \quad (94)$$

y la aceleración de Coriolis es:

$$\underline{a}_{\text{(Coriolis)}} = (2\dot{\theta} \dot{r} + \dot{\theta}^2 r) \underline{N} \quad (95)$$

Finalmente, se considera en esta sección, una vez más, la aceleración en coordenadas polares en un plano en ausencia de la aceleración de Coriolis:

$$\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \underline{e}_r + \underbrace{\omega \times (\omega \times r)}_{\text{Cartesiano}} \quad (96)$$

Siendo un ejemplo de esto una órbita o trayectoria cerrada en un plano. La aceleración en coordenadas cartesianas es:

$$\left( \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \right)_{\text{cartesiano}} \underline{e}_r = \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \omega^2 r \underline{e}_r = \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \omega^2 r \underline{e}_r \quad (97)$$



Por lo tanto, se llega al importante resultado:

$$\left(\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}\right)_{\text{Cartesiano}} = \left(\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} + \omega^2 \underline{r}\right)_{\text{plano polar}} \quad (98)$$

La Ec. (98) deviene una ecuación de resonancia de Euler Bernoulli si:

$$\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} + \omega^2 \underline{r} = A \cos \omega_1 t \underline{e}_r \quad (99)$$

donde el término a la derecha de la igualdad describe un término impulsor en coordenadas polares en un plano. Por definición:

$$\underline{r} = X \underline{i} + Y \underline{j} = r \cos \theta \underline{i} + r \sin \theta \underline{j} \quad (100)$$

y [11]:

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j} \quad (101)$$

De manera que si igualamos los componentes vectoriales de la Ec. (99)

$$\frac{d^2}{dt^2}(r \cos \theta) + \omega^2 r \cos \theta = A \cos \omega_1 t \cos \theta \quad (102)$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}(r \sin \theta) + \omega^2 r \sin \theta = A \cos \omega_1 t \sin \theta \quad (103)$$

es decir:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = A_x \cos \omega_1 t \quad (104)$$

y

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \omega^2 Y = A_y \cos \omega_1 t \quad (105)$$

Estas son ecuaciones de resonancia de Euler Bernoulli con soluciones [12]:

$$X(t) = \frac{A_x \cos \omega_1 t}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (106)$$

y:

$$Y(t) = \frac{A_y \cos \omega_1 t}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (107)$$

La condición de resonancia es:

$$\omega = \omega_1 \quad (108)$$

en cuyo punto:

$$\underline{r} \longrightarrow \infty. \quad (109)$$

La resonancia se presenta en el sistema polar en un plano pero no está presente en el sistema cartesiano. Sucede algo similar para las aceleraciones de Coriolis y centrífuga. Por lo tanto, surgen importantes nuevos conceptos en física a partir de las coordenadas polares en un plano. En la siguiente sección se traducen estos resultados a la teoría de circuitos.

### 3. Diseño de circuitos a partir de las Ecs.(104) y (105).

Consideramos algunos casos de resonancia descritos por las Ecs.(104) y (105). En el caso de una resonancia unidimensional en la dirección X tenemos

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = A_x \cos \omega_1 t, \quad (110)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \omega^2 Y = 0, \quad (111)$$

En el caso mecánico esto constituye una oscilación que aumenta su radio en la dirección X si la frecuencia de excitación  $\omega_1$  se aproxima a la eigen-frecuencia  $\omega$ , véase la Fig. 1. La Ec. (110) puede convertirse al caso eléctrico y da origen a un circuito oscilador no amortiguado con una capacitancia C y una inductancia L. Con un voltaje impulsor oscilatorio,

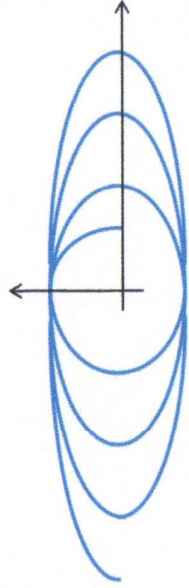


Figura 1: Órbita bidimensional con resonancia en una dirección.

## Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al personal técnico de AIAS y a muchos otros por interesantes discusiones. Se agradece a Dave Burleigh por su publicación en red y a Alex Hill y Robert Cheshire por las traducciones y grabaciones.

## Referencias.

- [1] M. W. Evans, Ed. "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity", publicación especial número seis de la ref. (2) (CISP, 2012, [www.cisp-publishing.com](http://www.cisp-publishing.com))
- [2] M. W. Evans, Ed., J. Found. Phys. Chem., (CISP, 2011 en adelante).
- [3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einsteinian General Relativity" (CISP, 2011).
- [4] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis 2005 a 2011), en siete volúmenes.
- [5] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis 2007, traducción al castellano por Alex Hill en la Sección en Español del portal [www.aias.us](http://www.aias.us)).
- [6] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).
- [7] M. W. Evans y S. Kieluch, Eds. "Modern Nonlinear Optics" (Wiley, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001), en seis volúmenes y dos ediciones.
- [8] M. W. Evans y J.-P. Vigié, "The Enigmatic Photon" (Kluwer 1994 a 2002) en diez volúmenes, con encuadernación dura y blanda.
- [9] M. W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagnetron in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).
- [10] K. Pendergast, "The Life of Myron Evans" (CISP 2011).
- [11] E. G. Milewski, Ed., "Vector Analysis Problem Solver" (Research and Education Association, Nueva York, 1987).
- [12] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics" (Harcourt, Nueva York, 1988, 3ª ed.)
- [13] H. Eckardt, D. W. Lindstrom, "Solution of the ECE Vacuum Equations", sección de publicaciones del portal [www.aias.us](http://www.aias.us).