

# Aplicaciones de la teoría ECE: la cinemática relativista de las órbitas.

por

M .W. Evans, H. Eckardt y R. Cheshire,

Civil List y AIAS.

([www.webarchive.org.uk](http://www.webarchive.org.uk), [www.aias.us](http://www.aias.us), [www.upitec.org](http://www.upitec.org), [www.atomicprecision.com](http://www.atomicprecision.com),  
[www.et3m.net](http://www.et3m.net).)

Traducción: Alex Hill ([www.et3m.net](http://www.et3m.net) )

## Resumen.

Se desarrolla una teoría relativista basada en la ecuación de fuerza de Minkowski, un límite clásico de la teoría ECE. Para todas las órbitas planas desaparece la aceleración relativista de Coriolis, de manera que la ley de fuerza relativista incluye sólo la aceleración centrípeta relativista. Se expresa el factor de Lorentz en términos del ángulo theta de las coordenadas polares planas, permitiendo el desarrollo de animaciones del movimiento relativista de objetos en órbitas planas de todo tipo.

*Palabras clave:* Teoría ECE, cinemática relativista de órbitas, animaciones.

## 1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie [1 – 10] se ha desarrollado la teoría de órbitas planas en términos de la geometría de Cartan, sobre la cual se basa la teoría ECE, como es bien conocido. El enfoque habitual hacia la teoría de órbitas se basa [11] en la dinámica clásica, con ajustes provenientes de la relatividad general einsteiniana. En el Sistema Solar estos ajustes son muy pequeños, pero en objetos tales como las galaxias en espiral las órbitas de las estrellas alrededor del centro de la galaxia no cumplen ni con la dinámica newtoniana ni con la dinámica einsteiniana. En documentos precedentes se ha demostrado que las bases dinámicas de las galaxias en espiral pueden explicarse de un modo muy sencillo a partir de cinemática no relativista en un plano. Este razonamiento surge como resultado de la inferencia de que las estrellas se mueven hacia afuera desde el centro, siguiendo una trayectoria con forma de espiral hiperbólica, y alcanzan una velocidad constante a una distancia infinita  $r$  a partir del centro, tal como se observa a nivel experimental. En la Sección 2 se comienza la exploración de un enfoque completamente novedoso de las órbitas relativistas basadas en la ecuación de fuerza de Minkowski [11]. Este es un curso que la teoría de la relatividad debió de haber tomado en 1905, pero siguió aquel del empleo por Einstein de la geometría de Riemann, un tema que se conoció desde entonces como la relatividad general. Desafortunadamente, ahora se acepta ampliamente [12] que las matemáticas de Einstein se encuentran plagadas de errores [1 – 10], en especial su omisión de la torsión, de manera que todas las inferencias basadas en relatividad general einsteiniana pierden toda validez. Este hecho se conoce desde hace aproximadamente cien años, y los errores en la ecuación de campo de Einstein fueron descubiertos por Schwarzschild apenas un mes después de la publicación por Einstein de su teoría de la precesión del perihelio en 1915 [1 – 10]. Hoy día se acepta ampliamente que la relatividad general constituye un dogma no científico. Obviamente, fracasa completamente en su descripción del universo, ya que fracasa por completo en su descripción de las galaxias en espiral.

La ecuación de fuerza de Minkowski es la ecuación de fuerza de Newton en la que el tiempo propio  $\tau$  sustituye al tiempo  $t$  en el marco de referencia del laboratorio. La ecuación fue inferida por Minkowski poco tiempo después de la introducción, por parte de Einstein, del concepto de momento relativista. En la Sección 2 se demuestra que el factor de Lorentz entra en la ecuación de fuerza a través del tiempo propio, y este hecho cambia la ley de fuerza necesaria para mantener en órbita un objeto con una masa  $m$ . La teoría incluida en la Sección 2 se desarrolla mediante cinemática y, por lo tanto, constituye una teoría perfectamente general. Puede reducirse a dinámica newtoniana, pero nunca se reduce a la relatividad general einsteiniana (RGE). Esto constituye ahora un requisito, ya que la RGE posee errores matemáticos [1 – 10]. La dinámica newtoniana resulta matemáticamente correcta pero, como es bien sabido, posee huecos conceptuales; por ejemplo, la dinámica newtoniana no genera la fuerza de Coriolis [11] y no desarrolla las fuerzas centrípeta y centrífuga de una manera que posea consistencia interna. La razón de ello es que la dinámica newtoniana utiliza un marco de referencia estático, cuando se requiere de un marco de referencia en rotación para las fuerzas de Coriolis y centrípeta, y también para la velocidad orbital [1 – 11]. En la Sección 2 se demuestra que la parte espacial de la cuatro-fuerza de Minkowski [11] produce nuevas e inesperadas propiedades orbitales, las cuales pueden evaluarse experimentalmente. Estas propiedades se representan gráficamente y mediante animación en la Sección 3.

## 2. La ley de fuerza relativista y las órbitas relativistas de la ecuación de Minkowski.

Consideremos la velocidad relativista en coordenadas polares planas:

$$\underline{v} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio y  $\gamma$  es el factor de Lorentz:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (2)$$

donde  $c$  es el valor asumido constante de la velocidad de la luz en el vacío. La aceleración relativista es:

$$\underline{a} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \gamma \frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad (3)$$

Utilizando el Teorema de Leibnitz:

$$\underline{a} = \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} + \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right) \quad (4)$$

La velocidad  $v$  aparece en el factor de Lorentz se define a través del elemento lineal infinitesimal:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

donde:

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = v^2 dt^2 \quad (6)$$

Por lo tanto:

$$c^2 d\tau^2 = (c^2 - v^2) dt^2 \quad (7)$$

y el factor de Lorentz es:

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (8)$$

En coordenadas polares planas:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (9)$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \quad (10)$$

Por lo tanto:

En coordenadas polares planas [1 - 11]:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (11)$$

por lo tanto, la velocidad no relativista es [1- 10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}(r \mathbf{e}_r) = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \omega r \mathbf{e}_\theta = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \omega \times r \\ &= \left(\frac{1}{m}\right) \left(\frac{L}{r} \mathbf{e}_\theta - \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{r}\right) \mathbf{e}_r \right) \end{aligned} \quad (12)$$

donde los vectores unitarios del sistema de coordenadas polares planas son:

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j} \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \quad (14)$$

\* tal como se analizó en documentos inmediatamente precedentes en esta serie y publicados en el portal [www.aiaa.us](http://www.aiaa.us).

El momento angular total no relativista es una constante de movimiento:

$$L_0 = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (15)$$

donde la velocidad angular no relativista es:

$$(16)$$

$$w = \frac{d\phi}{dt}$$

Para una partícula de masa  $m$  en órbita, su momento relativista es:

$$(17)$$

$$\underline{p} = \gamma m \frac{d\underline{r}}{dt} = m \frac{d\underline{r}}{dt}$$

una ecuación que puede reordenarse de la siguiente manera:

$$(18)$$

$$p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4$$

produciendo la ecuación de energía de Einstein:

$$(19)$$

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

en donde

$$(20)$$

$$E = \gamma m c^2$$

es la energía total, y

$$(21)$$

$$E_0 = m c^2$$

es la energía en reposo.

El momento angular total relativista es:

$$(22)$$

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \gamma L_0$$

y es la constante de movimiento  $L_0$  multiplicada por el factor de Lorentz  $\gamma$ .

Resulta obvio que el concepto de la ecuación de fuerza de Minkowski utiliza la aceleración, de manera que este tipo de relatividad puede utilizarse para describir la ley de fuerza de órbitas de una manera mucho más directa que con la RGE, la cual no considera las coordenadas polares planas. Cuando se le preguntó a Einstein cómo podía incorporar movimientos angulares en la RGE, contestó que lo ignoraba. De hecho, su propia ecuación de energía se deduce fácilmente a partir de coordenadas polares planas, como se observa a continuación. Consideremos el elemento lineal infinitesimal (5), y su desarrollo como:

$$\begin{aligned}
 mc^2 &= mc^2 \left( \frac{dt}{dz} \right)^2 - \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \\
 &= \gamma^2 mc^2 - \left( \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right) = \frac{E^2}{mc^2} - \frac{p^2}{c^2} \quad (23)
 \end{aligned}$$

De manera que:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (24)$$

que es la ecuación de energía de Einstein, Q. E. D. Nótese el momento lineal relativista en la Ec. (23) es:

$$p^2 = m^2 \left( \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right) \quad (25)$$

que es la Ec. (17), Q. E. D. La definición de la aceleración relativista es:

$$\underline{a} = \frac{d}{dz} \left( \frac{d\underline{r}}{dz} \right) = \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\underline{r}}{dt} + \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{d\underline{r}}{dt} \right) \right). \quad (26)$$

Las cantidades que aparecen en esta definición pueden expresarse en coordenadas polares planas de la siguiente manera:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (27)$$

y

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\underline{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + 2\underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}). \quad (28)$$

La aceleración relativista contiene más términos que la aceleración no relativista.

Utilizando la regla de la cadena [11]:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt} \quad (29)$$

donde  $v$  es la velocidad en el factor de Lorentz definida por la Ec. (10). Por lo tanto:

$$\frac{d\gamma}{dV} = \frac{d}{dV} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \quad (30)$$

y en coordenadas polares planas:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \gamma^4 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} + \gamma^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \\ &= \left( \frac{d\gamma}{dr} \frac{dr}{dt} + \gamma^2 \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \underline{e}_r + \gamma \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \frac{d\gamma}{dr} \underline{\omega} \times \underline{r} + 2\underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r \end{aligned} \quad (31)$$

En coordenadas cartesianas estáticas, por otro lado:

$$\underline{a} = \frac{d}{dr} \left( \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \gamma \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} + \gamma^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right). \quad (32)$$

De manera que:

$$\underline{a} \text{ (cartesiana)} = \left( \gamma \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} + \gamma^2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) \underline{e}_r \quad (33)$$

en donde:

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{dv} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \quad (34)$$

y

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt}. \quad (35)$$

Por lo tanto:

$$\underline{a} \text{ (cartesiana)} = \left( \gamma^4 \frac{v^2}{c^2} + \gamma^2 \right) \frac{dv}{dt} \underline{e}_r \quad (36)$$

en donde:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad (37)$$

y por lo tanto:

$$\underline{a}_{\text{(cartesiana)}} = \gamma^4 \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \underline{e}_r \quad (38)$$

Utilizando la Ec. (38) en la Ec. (31):

$$\underline{a}_{\text{(plano polar)}} = \gamma^4 \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \underline{e}_r + \gamma^2 \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \frac{d\gamma}{dt} \underline{\omega} \times \underline{r} + \gamma^2 \left( \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + 2 \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r \right) \quad (39)$$

que es la expresión para la aceleración relativista en coordenadas polares planas.

Puede demostrarse, como se indica a continuación, que la aceleración de Coriolis relativista desaparece de todas las órbitas planas. La expresión general [1 - 11] para la aceleración de Coriolis relativista es:

$$\underline{a}_{\text{(Coriolis)}} = \gamma^2 \left( r \frac{d\phi}{dt} \frac{d\phi}{dt} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \right) \underline{e}_\phi \quad (40)$$

en donde el momento angular relativista es:

$$L_0 = m r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (41)$$

Se deduce entonces que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{L_0}{m r^2} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{L_0}{m r^2} \right) \frac{dr}{dt} = - \frac{2 L_0}{m r^3} \frac{dr}{dt} \quad (42)$$

de manera que:

$$\underline{a}_{\text{(Coriolis)}} = \left( - \frac{2 L_0}{m r^2} \frac{dr}{dt} + 2 \frac{L_0}{m r^2} \frac{d\underline{r}}{dt} \right) \underline{e}_\phi = \underline{0} \quad (43)$$

Q. E. D.

Por lo tanto, la aceleración relativista para todas las órbitas planas es

$$\underline{a} = \gamma^4 \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \underline{e}_r + \gamma^2 \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \frac{d\gamma}{dt} \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (44)$$

El componente centrípeto relativista de esta órbita es:



$$\underline{a}(\text{centrípeta}) = \gamma^2 \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = -\frac{L^2}{2r^3} \underline{e}_r \quad (45)$$

En la Ec. (44):

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma^4}{c^2} v \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (46)$$

por lo tanto, la aceleración deviene:

$$\underline{a} = \gamma^4 \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r - \frac{L^2}{2r^3} \underline{e}_r + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \omega r \underline{e}_\theta \quad (47)$$

en donde el momento angular total relativista se define como:

$$L = \gamma L_0 = m r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \gamma m r^2 \omega \quad (48)$$

La ley de fuerza relativista es, por lo tanto, la masa  $m$  multiplicada por la aceleración relativista:

$$\underline{a} = \left( \gamma^4 \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{2r^3} \right) \underline{e}_r + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \omega \times \underline{r} \quad (49)$$

El término en  $\underline{e}_\theta$  puede desarrollarse como:

$$\underline{\omega} \times \underline{r} = \omega r \underline{e}_\theta \quad (50)$$

para llegar a:

$$\underline{a} = \left( \gamma^4 \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{2r^3} \right) \underline{e}_r + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} \omega r \underline{e}_\theta \quad (51)$$

Resultaría muy útil transformar esta ecuación a un formato a partir del cual fuese posible calcular la fuerza relativista a partir de cualquier órbita plana observable.

Esa transformación puede deducirse siguiendo el método desarrollado [1 - 10] en trabajos previos para la aceleración no relativista:

$$a = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{m^2 r^3} \right) e_r = \frac{d^2 r}{dt^2} e_r + \omega \times \left( \frac{\omega \times r}{\omega} \right). \quad (52)$$

Esta ecuación se transformó utilizando las reglas de la cadena:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (53)$$

y

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dr}{d\theta} = - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}. \quad (54)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (55)$$

y

$$\frac{dr}{dt} = -r^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{d\theta}{dt}, \quad (56)$$

donde en la teoría no relativista:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L_0}{m r^2} \quad (57)$$

de manera que:

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{L_0}{m} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (58)$$

Análogamente, para cualquier función  $f$ :

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L_0}{m r^2} \frac{df}{d\theta}. \quad (59)$$

Si:

$$f = \frac{dr}{dt} \quad (60)$$

entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{L_0}{m r^2} \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{L_0}{m} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right) \quad (61)$$

de manera que:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \left( \frac{L_0}{m r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (62)$$

Se deduce entonces que la aceleración puede expresarse como:

$$\underline{a} = - \left( \frac{L_0}{m r} \right)^2 \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r \quad (63)$$

Nótese cuidadosamente que la Ec. (63) es válida para CUALQUIER órbita plana, y que incluye la aceleración centrípeta. Esta última es la misma para cualquier órbita plana [1 - 10], y la aceleración de Coriolis es igual a cero para cualquier órbita plana.

La Ec. (63) es la ecuación requerida que produce la fuerza no relativista para cualquier órbita plana:

$$\underline{F} = m \underline{a} \quad (64)$$

Q. E. D.

La contraparte relativista de la Ec. (52) es:

$$\underline{a} = \left( \gamma^4 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \frac{L^2}{m^2 r^3} \right) \underline{e}_r + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \underline{\omega} \times \mathbf{r} \quad (65)$$

donde:

$$\underline{\omega} \times \mathbf{r} = \omega r \underline{e}_\theta \quad (66)$$

y en donde el momento angular relativista:

$$L = \gamma L_0 = \gamma m r^2 \omega = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (67)$$

debe utilizarse para mantener consistencia interna. Por lo tanto, a partir de la Ec. (67):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\gamma m r^2} \quad (68)$$

de manera que:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{m\gamma} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (69)$$

Análogamente, la Ec. (59) deviene:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\gamma m r^2} \frac{df}{d\theta} \quad (70)$$

de manera que la Ec. (62) deviene:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\left( \frac{L}{\gamma m r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (71)$$

Utilizando la Ec. (71) en la Ec. (65):

$$\underline{a} = -\left( \left( \frac{\gamma L}{m r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{L^2}{m^2 r^3} \right) \underline{e}_r + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2}{dt^2} \omega r \underline{e}_\theta \quad (72)$$

y utilizando las Ecs. (68), (69) y (71):

$$\underline{a} = -\left( \frac{L}{m r} \right)^2 \left( \gamma \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r + \frac{L^4}{m^2 c^2 r^3} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \underline{e}_\theta \quad (73)$$

Esta es la ecuación requerida que describe la fuerza relativista producida por cualquier órbita plana:

$$\underline{F} = m \underline{a} \quad (74)$$

Q. E. D. Para los propósitos de las gráficas y la animación en la Sección 3 de este documento, resulta conveniente expresar el factor de Lorentz en términos del ángulo  $\theta$ . Para lograr esto consideremos la velocidad no relativista del factor de Lorentz en coordenadas polares planas:

$$\underline{v} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \omega r \underline{e}_\theta \quad (75)$$

Tal como en los documentos anteriores

$$\underline{v} = \left( \frac{L_0}{m} \right) \left( \frac{1}{r} \underline{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r \right). \quad (76)$$

Para una órbita elíptica:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} (1 + \epsilon \cos \theta) \quad (77)$$

de manera que:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\epsilon}{\alpha} \sin \theta \quad (78)$$

y la velocidad no relativista es:

$$\underline{v} = \left( \frac{L_0}{m\alpha} \right)^2 \left( (1 + \epsilon \cos \theta) \underline{e}_\theta + \epsilon \sin \theta \underline{e}_r \right) \quad (79)$$

Por lo tanto:

$$v^2 = \left( \frac{L_0}{m\alpha} \right)^2 (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta) \quad (80)$$

que es la expresión requerida para  $v$  del factor de Lorentz en términos de  $\theta$ , Q. E. D. Este procedimiento puede repetirse para cualquier órbita plana donde se conozca la dependencia de  $r$  con respecto a  $\theta$ .

La velocidad no relativista  $v$  puede expresarse en términos de  $\omega$  y  $r$  utilizando las Ecs. (75), (76) y el momento angular total no relativista:

$$L_0 = m r^2 \omega = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (81)$$

Para una órbita plana:

$$\underline{v} = \omega r^2 \left( \frac{1}{r} \underline{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r \right) \quad (82)$$

de manera que:

$$v^2 = \omega^2 r^2 \left( 1 + r^2 \left( \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right)^2 \right) \quad (83)$$

que es la expresión requerida, Q. E. D. Para la órbita elíptica, por ejemplo:

$$\cos\theta = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\alpha}{r} - 1 \right) \quad (84)$$

de manera que, utilizando las Ecs. (83) y (84):

$$v^2 = \frac{r^4 \omega^2}{\alpha^2} \left( 1 + \epsilon^2 + 2 \left( \frac{\alpha}{r} - 1 \right) \right) \quad (85)$$

La velocidad lineal orbital no relativista de la órbita elíptica es:

$$v^2 = \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{dt^2} \quad (86)$$

y esto se utiliza en el factor de Lorentz. En el caso de una órbita circular:

$$\epsilon = 0, \quad \alpha = r \quad (87)$$

y se obtiene el resultado conocido, el cual expresa que para una órbita circular en teoría no relativista:

$$v = \omega r, \quad (88)$$

En resumen, la fuerza relativista para cualquier órbita plana se define como:

$$\underline{F} = -\frac{L^2}{m r^2} \left( \gamma \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_r + \frac{L^A}{m r^3 c^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (89)$$

en donde el factor de Lorentz es:

$$\gamma = \left( 1 - \left( \frac{L_0}{m c} \right)^2 \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right)^2 \right) \right)^{-1/2} \quad (90)$$

y en donde el momento angular total relativista es:

$$L = \gamma L_0 = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \gamma m r^2 \omega, \quad (91)$$

Algunas leyes de fuerza de diversas órbitas se analizan en la Sección 3.

Para propósitos de animación (Sección 3) se requieren las expresiones analíticas para

la evolución del tiempo para un objeto de masa  $m$  en órbita. En la teoría no relativista de órbitas, se calcula la evolución del tiempo [1 - 11] a partir del momento angular total:

$$L_0 = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (92)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_0}{m r^2} \quad (93)$$

En general, la órbita plana es:

$$r = f(\theta) \quad (94)$$

Por lo tanto:

$$dt = \frac{m}{L_0} f^2(\theta) d\theta \quad (95)$$

que se integra como:

$$t = \int dt = \frac{m}{L_0} \int f^2(\theta) d\theta \quad (96)$$

Para una órbita elíptica:

$$f(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (97)$$

y para una espiral hiperbólica

$$f(\theta) = -\frac{r_0}{\theta} \quad (98)$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dr} = \frac{L_0}{m r^2} \quad (99)$$

se descubre que:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{L_0}{m r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L_0}{m} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (100)$$

Para la espiral hiperbólica (98):

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r_0} \quad (101)$$

por lo tanto:

$$r = \left( \frac{L_0}{m r_0} \right) t. \quad (102)$$

El equivalente relativista de la Ec. (93) es:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \gamma \frac{L_0}{m r^2} \quad (103)$$

donde

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (104)$$

$$v^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \left( 1 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 \right). \quad (105)$$

Para la espiral hiperbólica (98):

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \left( \frac{L_0}{m r_0} \right)^2 \quad (106)$$

y

$$\left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 = \frac{r_0^2}{r^4} \quad (107)$$

de manera que la velocidad del factor de Lorentz viene dada por:

$$v^2 = \left( \frac{L_0}{m r_0} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right) \quad (108)$$

a partir de lo cual se descubre que:



$$v \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{L_0}{m r_0} \quad (109)$$

tal como se observa experimentalmente en la conocida curva de velocidad de una galaxia en espiral. Por lo tanto, el factor de Lorentz es:

$$\gamma = \left( 1 - \left( \frac{L_0}{m r_0 c} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right)^{-1/2} \right) \quad (110)$$

Utilizando las reglas de la cadena:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{dr}{dz} \frac{d\theta}{dr} = \gamma \frac{L_0}{m r^2} \quad (111)$$

y

$$\frac{dr}{dz} = \gamma \frac{L_0}{m r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (112)$$

se descubre que:

$$r = \gamma \frac{L_0}{m r_0} z \quad (113)$$

En el marco del tiempo propio  $\tau$ ,  $r$  es proporcional a  $\gamma\tau$ . El tiempo propio es el tiempo medido en el marco de referencia en el cual la partícula se encuentra en reposo. El tiempo  $t$  del observador, o de laboratorio, es el tiempo en el marco de referencia con respecto al cual la masa  $m$  se encuentra en movimiento. Por definición de la transformación de Lorentz:

$$\gamma = \frac{dt}{dz} \quad (114)$$

de manera que

$$z = \frac{t}{\gamma} \quad (115)$$

y

$$z = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} t \quad (116)$$

Por lo tanto, a partir de las Ecs. (103), (110) y (113):

$$r = \left( 1 - \left( \frac{L_0}{m r_0 c} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right) \right)^{1/2} \frac{L_0}{m r_0} z \quad (117)$$

y en la teoría relativista de la órbita con forma de espiral hiperbólica ya no existe una dependencia sencilla de  $r$  con respecto a  $t$ . Resolviendo para  $r$  (véase nota de acompañamiento 238(9)):

$$r = \frac{z}{\sqrt{2}} \left( A z + \left( A^2 z^2 - 4B \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (118)$$

donde:

$$A = \left( 1 - \left( \frac{L_0}{m r_0 c} \right)^2 \right) \left( \frac{L_0}{m r_0} \right)^2 \quad (119)$$

y

$$B = \left( \frac{L_0}{m r_0 c} \right)^2 \left( \frac{L_0}{m r_0} \right)^2 r_0^2 \quad (120)$$

Esta ecuación se reduce a la Ec. (102) en el límite no relativista  $v \ll c$ .

Con el objeto de animar el movimiento de una masa  $m$  a lo largo de una trayectoria con forma de espiral hiperbólica, resulta conveniente transformar las coordenadas. Comenzando a partir de:

$$\underline{r}(t) = r(t) \underline{e}_r \quad (121)$$

expresamos el vector unitario como:

$$\underline{e}_r = \cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j} \quad (122)$$

de manera que:

$$\underline{r}(t) = r(t) (\cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j}) \quad (123)$$

Para la espiral hiperbólica:

$$r = -r_0/\theta, \quad (124)$$

$$\theta = -v_0/r, \quad (125)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= r(t) \left( \cos\left(-\frac{r_0}{r}\right) \underline{i} + \operatorname{sen}\left(-\frac{r_0}{r}\right) \underline{j} \right) \\ &= r(t) \left( \cos\left(\frac{r_0}{r}\right) \underline{i} - \operatorname{sen}\left(\frac{r_0}{r}\right) \underline{j} \right) \end{aligned} \quad (126)$$

En el límite no relativista:

$$r = \left( \frac{L_0}{m v_0} \right) t \quad (127)$$

$$\text{de manera que: } \underline{r}(t) = \left( \frac{L_0}{m v_0} \right) t \left( \cos\left(\frac{m v_0^2}{L_0 t}\right) \underline{i} - \operatorname{sen}\left(\frac{m v_0^2}{L_0 t}\right) \underline{j} \right) \quad (128)$$

La animación se produce como una serie de representaciones gráficas (X, Y) en función del tiempo  $t$ , donde:

$$X = \left( \frac{L_0}{m v_0} \right) t \cos\left(\frac{m v_0^2}{L_0 t}\right), \quad (129)$$

$$Y = \left( \frac{L_0}{m v_0} \right) t \operatorname{sen}\left(\frac{m v_0^2}{L_0 t}\right). \quad (130)$$

Las funciones circulares poseen la conocida propiedad:

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1, \quad (131)$$

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1, \quad (132)$$

de manera que, como

$$t \rightarrow 0 \quad (133)$$

en las Ecs. (10) y (11):

$$X \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad Y \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad (134)$$

y como  $t \longrightarrow \infty$

(136)

entonces:

$$X \longrightarrow \infty$$

(136)

$$Y \longrightarrow \text{constante,}$$

(137)

y la partícula se mueve hacia afuera a lo largo de la espiral a partir del centro de la galaxia.

Para animar el movimiento relativista de una masa  $m$  a lo largo de una espiral hiperbólica se utiliza la ecuación relativista (118) en la Ec. (126).

La animación del movimiento de una masa  $m$  a lo largo de una órbita elíptica constituye un problema no trivial desde un punto de vista analítico, pero puede codificarse a partir del siguiente método. En este caso, la teoría no relativista da:

$$t = \int dt = \frac{m\alpha^2}{L_0} \int \frac{d\theta}{(1+\epsilon \cos\theta)^2}$$

(138)

$$= \frac{m\alpha^2}{L_0(1-\epsilon^2)} \left[ \frac{2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} \tan^{-1} \left( \frac{(1-\epsilon) \tan(\theta/2)}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} \right) - \frac{\epsilon \sin\theta}{1+\epsilon \cos\theta} \right]$$

(139)

y como es bien sabido [11] esta ecuación no puede invertirse analíticamente para expresar a  $\theta$  como una función del tiempo  $t$ . La trayectoria como una función de  $\theta$  es:

$$\underline{r}(\theta) = r(\theta) (\cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j})$$

(140)

donde: 
$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1+\epsilon \cos\theta}$$

(141)

Por lo tanto: 
$$X = \frac{\alpha \cos\theta}{1+\epsilon \cos\theta}, \quad Y = \frac{\alpha \sin\theta}{1+\epsilon \cos\theta}$$

(142)

y se representan gráficamente los puntos (X, Y) como una función de  $\theta$  (véase nota de

acompañamiento 238(12)). Los puntos (X, Y) pueden representarse gráficamente como una función de  $t$ , como se requiere para una animación mediante el empleo de la Ec. (139) para transformar a  $\theta$  en  $t$ .

Por ejemplo:

$$t_1 = \frac{m\alpha^2}{L_0} \int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{(1+\epsilon \cos\theta)^2} \quad (143)$$

$$= \frac{m\alpha^2}{L_0(1-\epsilon^2)} \left[ \frac{2}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} \tan^{-1} \left( \frac{(1-\epsilon) \tan(\theta_1/2)}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} \right) - \frac{\epsilon \sin\theta_1}{1+\epsilon \cos\theta_1} \right]$$

Este método genera la velocidad correcta y cumple automáticamente con las tres leyes de Kepler.

Para la elipse con precesión o sección cónica, la teoría no relativista da:

$$r = \frac{\alpha}{1+\epsilon \cos(\gamma\theta)} \quad (144)$$

y:

$$t = \frac{m\alpha^2}{L_0} \int \frac{d\theta}{(1+\epsilon \cos(\gamma\theta))^2} \quad (145)$$

de manera que:

$$X = \frac{\alpha \cos\theta}{1+\epsilon \cos(\gamma\theta)}, \quad Y = \frac{\alpha \sin\theta}{1+\epsilon \cos(\gamma\theta)} \quad (146)$$

y se representa gráficamente (X, Y) como una función del tiempo  $t$ . Se sabe a partir de trabajos previos [1 - 10] que emergen secciones cónicas fractales cuando se incrementa el valor de  $x$ , y la animación de este tipo de órbitas producirá resultados muy interesantes en matemáticas y astronomía.

La teoría relativista de las órbitas de sección cónica da:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \gamma \frac{L_0}{m r^2} \quad (147)$$

en donde el factor de Lorentz es:

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (148)$$

con la velocidad definida por:

$$\underline{v} = \frac{L_0}{m} \left( \frac{1}{r} \underline{e}_\theta - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r \right). \quad (149)$$

A partir de la Ec. (147):

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{m r^2}{L_0} d\theta \quad (150)$$

e integrando, se obtiene:

$$\tau = \frac{m}{L_0} \int \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} r^2 d\theta \quad (151)$$

Para las secciones cónicas, la Ec. (80) da la velocidad del factor de Lorentz como una función de  $\theta$  como:

$$v^2 = \left(\frac{L_0}{m\alpha}\right)^2 (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos\theta) \quad (152)$$

de manera que:

$$\tau = \frac{m\alpha^2}{L_0} \int \left(1 - \left(\frac{L_0}{m\alpha c}\right)^2 (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos\theta)\right)^{1/2} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos\theta)^2} \quad (153)$$

expresión que debe de integrarse en forma numérica. La animación se llevó a cabo utilizando la Ec. (153) y calculando  $\tau$  para cada valor de  $\theta$ .

Por ejemplo:

$$\tau_1 = \frac{m}{L_0} \int_0^{\theta_1} \left(1 - \left(\frac{L_0}{m\alpha c}\right)^2 (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos\theta)\right)^{1/2} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos\theta)^2} \quad (154)$$

Repítase para  $t_1, t_2, \dots, t_n$  y se crea la animación de (X, Y) como una función de  $t$ .

Finalmente, la teoría relativista de las secciones cónicas con precesión se lleva a cabo

con

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\chi\theta)} \quad (155)$$

y:

$$z = \frac{m\alpha^2}{L_0} \int \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos(\chi\theta))^2} \quad (156)$$

La velocidad del factor de Lorentz es:

$$\underline{v} = \frac{L_0}{m} \left( \frac{1 + \epsilon \cos(\chi\theta)}{\alpha} \right) \underline{e}_\theta - d \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \underline{e}_r \quad (157)$$

donde:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\chi \epsilon \sin(\chi\theta)}{\alpha} \quad (158)$$

de manera que

$$v^2 = \left( \frac{L_0}{m\alpha} \right)^2 \left( (1 + \epsilon \cos(\chi\theta))^2 + \chi^2 \epsilon^2 \sin^2(\chi\theta) \right) \quad (159)$$

Por lo tanto, se calcula  $\tau$  a partir de las Ecs. (156) y (159) para un dado  $\theta$ , por ejemplo:

$$z_1 = \frac{m\alpha^2}{L_0} \int_0^{\theta_1} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos(\chi\theta))^2} \quad (160)$$

• con:

$$v^2 = \left( \frac{L_0}{m\alpha} \right)^2 \left( (1 + \epsilon \cos(\chi\theta))^2 + \chi^2 \epsilon^2 \sin^2(\chi\theta) \right) \quad (161)$$

### 3. Análisis de resultados gráficos y animaciones.

En esta sección reunimos las ecuaciones para el cálculo de órbitas y luego analizamos algunos resultados para la espiral hiperbólica y para la elipse con precesión.

#### 3.1 Las ecuaciones.

##### 3.1.1 Ecuaciones no relativistas.

Una órbita viene dada por la función

$$r = r(\theta) \quad (162)$$

La velocidad orbital es

$$v = \frac{L_0}{m} \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}\right)^2} \quad (163)$$

Los componentes de la fuerza son

$$F_r = -\left(\frac{L^2}{m r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r}\right) + \frac{L^2}{m r^3}\right) \quad (164)$$

$$F_\theta = \frac{L^4}{2 m^3 r^3} \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}\right) \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r}\right) \quad (165)$$

con  $L = L_0$  representando el momento angular no relativista, una constante de movimiento. Las dependencias temporales se calculan como sigue:

$$t(\theta) = \frac{m}{L_0} \int r(\theta)^2 d\theta, \quad (166)$$

$\theta(t)$  = función inversa de  $t(\theta)$

$r(t) = r(\theta(t))$ ; se obtiene directamente a partir de la función orbital  $r(\theta)$ :

$$\left. \begin{array}{l} (167) \\ (168) \end{array} \right\}$$

##### 3.1.2 Ecuaciones relativistas

El factor relativista es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2} \left(\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}\right)^2\right)\right)^{-1/2} \quad (169)$$

Los componentes de la fuerza son



$$\begin{aligned}
 F_r &= - \left( \gamma \frac{L^2}{m r^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \right) + \frac{L^2}{m r^3} \right) \\
 &= - \frac{L^2}{m r^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \right) \left( 1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2} \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 \right) \right)^{-2} \\
 &\quad - \frac{L_0^2}{m r^3} \left( 1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2} \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 \right) \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

(170)

$$F_\theta = \frac{L^4}{c^2 m^3 r^3} \left( \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right) \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \right)$$

(171)

$$= \frac{L_0^4}{c^2 m^3 r^3} \left( \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right) \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \right) \left( 1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2} \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 \right) \right)^{-2}$$

El factor  $\gamma$  contiene a  $r(\theta)$ , que a su vez es una función del tiempo. Por lo tanto, forma parte de la siguiente integral:

$$t(\theta) = \frac{m}{L_0} \int \gamma r(\theta)^2 d\theta$$

(172)

$\theta(t)$  = función inversa de  $t(\theta)$ ;

$r(t) = r(\theta(t))$ ; se obtiene directamente a partir de la función orbital  $r(\theta)$ .

(173)

(174)

### 3.2 Resultados para la espiral hiperbólica

La órbita hiperbólica es

$$r = - \frac{r_0}{\theta}$$

(175)

$\theta$  varía entre  $-\infty$  y  $0$ , de manera que los valores de radio sean positivos. Una definición más natural sería el no utilizar el signo negativo, pero entonces la Ec.(172) daría un tiempo negativo.

Esta situación podría remediarse mediante el empleo del valor absoluto de la integral.

#### 3.2.1 Resultados no relativistas.

A partir de las ecuaciones anteriores obtenemos, con la Ec.(175):

$$v = \frac{L_0}{m r_0} \sqrt{\theta^2 + 1}$$

(176)

Para  $\theta \rightarrow 0$  se aproxima a la curva de velocidad constante y asíntótica de las galaxias:

(177)

$$v \rightarrow \frac{L_0}{m r_0}$$

Si es posible medir el momento angular de una estrella en la región de velocidad constante y se conoce su masa, es posible estimar el parámetro  $r_0$  de la espiral.

Las otras cantidades poseen una funcionalidad lineal o hiperbólica respecto del tiempo  $t$ :

$$F_r = \frac{\theta^3 L_0^2}{m r_0^3}, \quad (178)$$

$$F_\theta = 0, \quad (179)$$

$$t = -\frac{m \sqrt{v_0}^2}{\theta L_0}, \quad (180)$$

$$\theta = -\frac{m \sqrt{v_0}^2}{t L_0}, \quad (181)$$

$$r = \frac{t L_0}{m \sqrt{v_0}} \quad (182)$$

### 3.2.2 Resultados relativistas.

Para la espiral hiperbólica el factor  $\gamma$  relativista es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2 r_0^2} (\theta^2 + 1)}}$$

y las fuerzas son

$$F_r = -\frac{\theta^3 L_0^2}{m r_0^3} \left( 1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2 r_0^2} (\theta^2 + 1) \right)^{-1},$$

(184)

$$F_\theta = 0.$$

(185)

Obviamente no existe desviación angular debido a efectos relativistas. Las funciones  $t$ ,  $\theta$  y  $r$  son bastante complejas debido al factor  $\gamma$ :

$$t = -m r_0^2 \sqrt{\frac{-\theta^2 L_0^2}{c^2 m^2 r_0^2} - \frac{L_0^2}{c^2 m^2 r_0^2} + 1} = \frac{c^2 m^2 r_0^2 \sqrt{c^2 m^2 r_0^2 - (\theta^2 + 1) L_0^2}}{\theta L_0 (L_0 - c m r_0) (L_0 + c m r_0)}, \quad (186)$$

$$\theta = -\frac{c^2 m^2 r_0^3}{L_0} \sqrt{\frac{c^2 m^2 r_0^2 - L_0^2}{t^2 L_0^4 - 2 c^2 m^2 r_0^2 t^2 L_0^2 + c^4 m^4 r_0^4 t^2 + c^2 m^4 r_0^6}}, \quad (187)$$

$$r = -\frac{r_0}{\theta} = \frac{L_0}{c m r_0^2} \sqrt{\frac{t^2 L_0^4 - 2 c^2 m^2 r_0^2 t^2 L_0^2 + c^4 m^4 r_0^4 t^2 + c^2 m^4 r_0^6}{c^2 m^2 r_0^2 - L_0^2}}, \quad (188)$$

Estas ecuaciones pueden re-expresarse como

$$\Theta = - \frac{m v_0^2}{t L_0} \cdot C(t) \quad (189)$$

$$r = \frac{t L_0}{m r_0} / C(t) \quad (190)$$

con las funciones dependientes del tiempo

$$C(t) = \sqrt{\frac{1-a}{1-2at+a^2+bt^2}}, \quad a = \left(\frac{L_0}{c r_0 m}\right)^2, \quad b(t) = \left(\frac{r_0}{ct}\right)^2. \quad (191)$$

De esta forma puede verse que  $C(t)$  es un factor de corrección relativista para las ecuaciones no relativistas (181, 182). En el límite  $t \rightarrow 0$  las funciones  $\theta$  y  $r$  no se aproximan al infinito o a cero, como sucede en el caso no relativista. Los límites son

$$\Theta(t \rightarrow 0) = - \frac{\sqrt{c^2 m^2 r_0^2 - L_0^2}}{L_0}, \quad (192)$$

$$r(t \rightarrow 0) = \frac{r_0 L_0}{\sqrt{c^2 m^2 r_0^2 - L_0^2}}. \quad (193)$$

Para que el argumento de la raíz cuadrada sea positivo tenemos la condición

$$L_0 < c m r_0. \quad (194)$$

Esta es la misma condición que se obtiene para el caso  $v < c$  para la curva de velocidad, la Ec.(177). Sin embargo, debe observarse que la velocidad cerca del centro es la más elevada, por lo que la verdadera condición  $v < c$  posee un valor mucho más bajo de  $L_0$ . En el límite ultrarelativista, la espiral se inicia claramente a partir del centro, tal como puede observarse en las siguientes gráficas y en la sección de animación.

La órbita elíptica se representa gráficamente en la Figura 1. La relación  $v/c$  se representa en la Fig. 2 en una gráfica polar. Esta relación no es constante como sucede en la forma sencilla de la relatividad restringida de Einstein, pero depende de la velocidad orbital que es una función del ángulo. En los cálculos, establecimos  $m = c = r_0 = 1$ , de manera que la velocidad orbital, al igual que la relación  $v/c$ , se define mediante el momento angular  $L_0$ . Para todos los cálculos seleccionamos

$$L_1 = 0.01, L_2 = 0.03, L_3 = 0.06, L_4 = 0.069 \quad (195)$$

con el objeto de que la relación  $v/c$  permanezca por debajo del valor unitario. A partir de la Fig. 3 puede observarse en la fuerza radial aumenta significativamente en el caso relativista. En la Fig.4 se muestra en la región cercana al centro en una imagen ampliada. Obviamente, los efectos relativistas cambian la característica direccional. Los efectos de dependencia respecto del tiempo se muestran en las Figs. 5 y 6. El ángulo comienza en valores absolutos significativamente menores en el caso relativista, tal como habría de esperarse a partir de las ecuaciones. Esto corresponde a un radio inicial mayor (Fig. 6). Por definición, tanto la órbita no relativista como la órbita relativista son iguales.

### 3.2.3 Animaciones

Ambas órbitas fueron animadas a partir de las ecuaciones dadas. La animación se lleva a cabo para el vector orbital con dependencia temporal.

$$r(t) = [X(t), Y(t)] \quad (196)$$

que en coordenadas cartesianas viene dado por

$$X(t) = r(t) \cos\left(\frac{r_0}{r(t)}\right), \quad (197)$$

$$Y(t) = r(t) \operatorname{sen}\left(\frac{r_0}{r(t)}\right), \quad (198)$$

donde  $r(t)$  es la Ec.(182) o (188) en el caso no relativista o relativista, respectivamente. Las imágenes instantáneas, incluidas en las Figs.7 y 8, ofrecen imágenes del programa de animación. Pueden establecerse varios parámetros, tales como el número de brazos de la espiral y de variaciones en el ángulo y en el tiempo de producción de estrellas, con el objeto de brindar una imagen más realista de una galaxia en espiral. El movimiento relativista puede combinarse con movimiento no relativista. La posición inicial por el movimiento relativista puede observarse claramente. Para el estudio de la curva de velocidad constante, pueden establecerse parámetros en forma similar a lo observado en la Fig.8, por ejemplo un ángulo final de 0.05 y una velocidad de animación de 20.

El programa de animación será desarrollado como una aplicación de Microsoft Windows, y puede descargarse del portal de AIAS [[www.aias.us](http://www.aias.us)]. Luego de la primera corrida, se desarrolla un archivo de configuración, Galaxie.CNF, el cual ahorra posición y tamaño de ventana y que se lee nuevamente al inicio de la siguiente corrida.

### 3.3 Resultados para la elipse con precesión

Para la elipse con precesión la órbita es

$$r = \frac{\alpha}{\epsilon \cos(\theta x) + 1} \quad (199)$$

### 3.3.1 Resultados no relativistas

Los resultados no relativistas para esta órbita son

$$v = \frac{L_0}{\alpha m} \sqrt{\epsilon^2 x^2 \operatorname{sen}(\theta x)^2 + \epsilon^2 \cos(\theta x)^2 + 2\epsilon \cos(\theta x) + 1}, \quad (200)$$

$$F_r = \frac{\epsilon x^2 \cos(\theta x) (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^2 L_0^2}{\alpha^3 m} - \frac{(\epsilon \cos(\theta x) + 1)^3 L_0^2}{\alpha^3 m} \quad (201)$$

$$F_\theta = \frac{\epsilon^2 x^3 \cos(\theta x) (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^3 \operatorname{sen}(\theta x) L_0^4}{\alpha^5 c^2 m^3}, \quad (202)$$

$$t = \frac{2\alpha^2 m}{x L_0} \left( \operatorname{atan} \left( \frac{(2\epsilon - 2) \operatorname{sen}(\theta x)}{2\sqrt{1 - \epsilon^2} (\cos(\theta x) + 1)} \right) - \frac{\epsilon \operatorname{sen}(\theta x)}{(\cos(\theta x) + 1) \left( \frac{\epsilon^2 - \epsilon - \epsilon + 1}{(\cos(\theta x) + 1)^2} \operatorname{sen}(\theta x)^2 - \epsilon^2 - \epsilon + \epsilon + 1 \right)} \right) \quad (203)$$

La función  $t(\theta)$  no puede invertirse, por lo que no puede obtenerse una dependencia analítica para  $\theta(t)$  y  $r(t)$ . Aquí se vuelve necesario utilizar cálculo numérico.

### 3.3.2 Resultados relativistas

En el caso relativista, el empleo de álgebra computacional produce los siguientes resultados

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2 \alpha^2} (\epsilon^2 x^2 \operatorname{sen}(\theta x)^2 + (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^2)}} \quad (204)$$

$$F_r = \frac{L_0^2 \epsilon x^2 \cos(\theta x) (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^2}{\alpha^3 m \left( 1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2 \alpha^2} (\epsilon^2 x^2 \operatorname{sen}(\theta x)^2 + (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^2 \right)^2}$$

$$- \frac{L_0^2 (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^3}{\alpha^3 m \left( 1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2 \alpha^2} (\epsilon^2 x^2 \operatorname{sen}(\theta x)^2 + (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^2 \right)^2}, \quad (205)$$

$$F_\theta = \frac{L_0^4 \epsilon^3 x^3 \cos(\theta x) (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^3 \operatorname{sen}(\theta x)}{\alpha^5 c^2 m^3 \left( 1 - \frac{L_0^2}{c^2 m^2 \alpha^2} (\epsilon^2 x^2 \operatorname{sen}(\theta x)^2 + (\epsilon \cos(\theta x) + 1)^2 \right)^2} \quad (206)$$

Obviamente hay un componente angular de la fuerza, en contraste con la espiral hiperbólica. La primera representación gráfica de la elipse con precesión (Fig. 9) es la órbita; por motivos de claridad sólo se muestran dos vueltas para  $x = 1.1$ . Todos los otros parámetros se establecieron como iguales a la unidad excepto el momento angular, tal como se describe más arriba. Se obtienen valores razonables de  $v < c$  para

$$L_1 = 0.1, L_2 = 0.3, L_3 = 0.6, L_4 = 0.69 \quad (207)$$

En la Fig. 10 se muestra la relación  $v/c$  para estos valores. La componente radial de la fuerza se representa en una gráfica cartesiana en la Fig. 11. Para el valor más alto de  $L$ , que representa el caso ultrarelativista,  $F_r$  adopta valores positivos, es decir que se observan efectos anti-gravitatorios cerca del perihelio, lo cual constituye un resultado bastante sorprendente. La componente angular de la fuerza de Minkowski es mucho más pequeña, tal como puede observarse a partir de la Fig. 12. Es simétrica hasta el punto  $\theta = \pi$ , de manera que su integral lineal desaparece, es decir  $F_\theta$  genera algunas aceleraciones que en promedio se cancelan a lo largo de la órbita. En las Figs. 13 y 14 se representan gráficamente, utilizando coordenadas polares, los valores absolutos de ambos componentes de la fuerza, y que dan origen a una forma similar a clavos de malabarista debido a los cruces a través del valor de cero de las fuerzas. Finalmente, en la Fig. 15 se presenta la función temporal no relativista  $t(\theta)$ . El salto se debe a una característica de la función arco-tangente que se produce por definición valores en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Concluimos que los efectos relativistas conducen a leyes de fuerza bastante complicadas. Todas las funciones orbitales sólo pueden calcularse analíticamente para la espiral hiperbólica. Ensayos con otros tipos de espirales demostraron que no pueden ser manejadas de una manera completamente analítica, tal como sucede en el caso de la elipse con precesión.

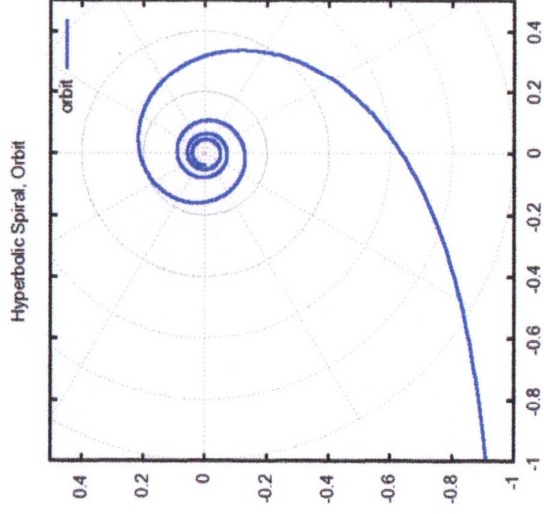


Figura 1: Órbita en espiral hiperbólica con  $r_0 = 1$ .

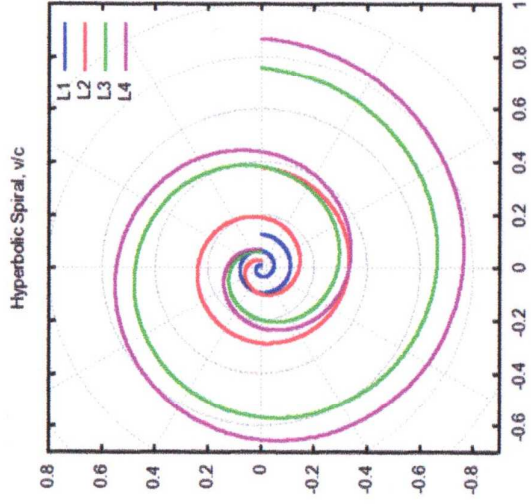


Figura 2: Relación  $v/c$  de la espiral hiperbólica para varios valores de momento angular  $L$ .

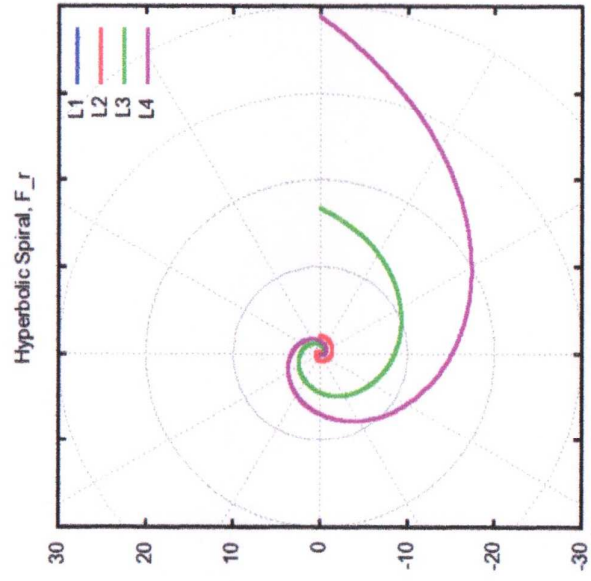


Figura 3: Componente radial de la fuerza de la espiral hiperbólica.

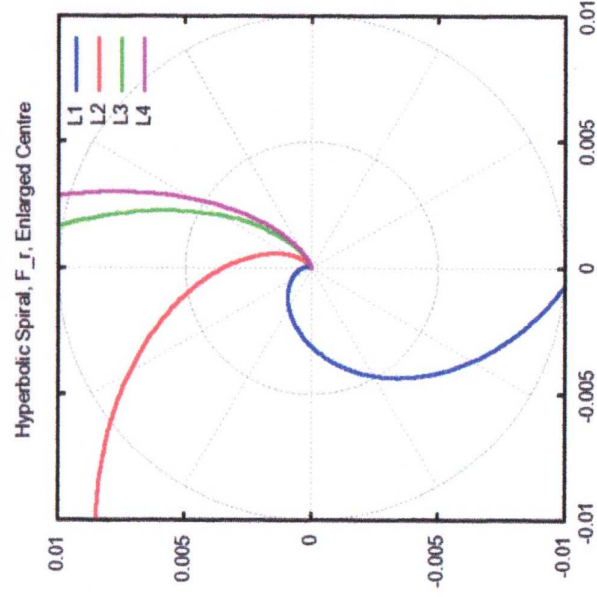


Figura 4: Componente radial de la fuerza de la espiral hiperbólica en la región cercana al centro.

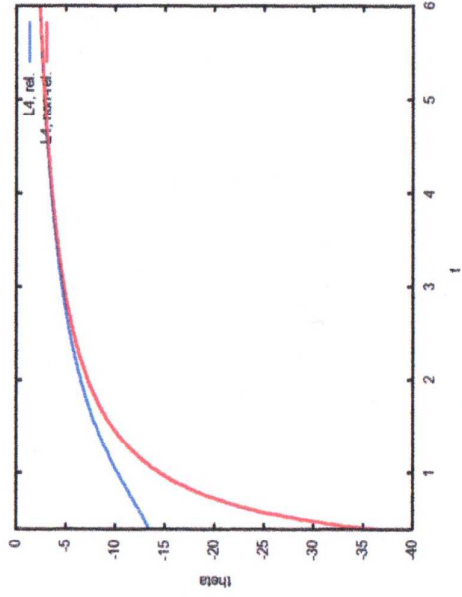


Figura 5: Dependencia respecto del tiempo  $\theta(t)$  para la espiral hiperbólica en el caso relativista y no relativista.

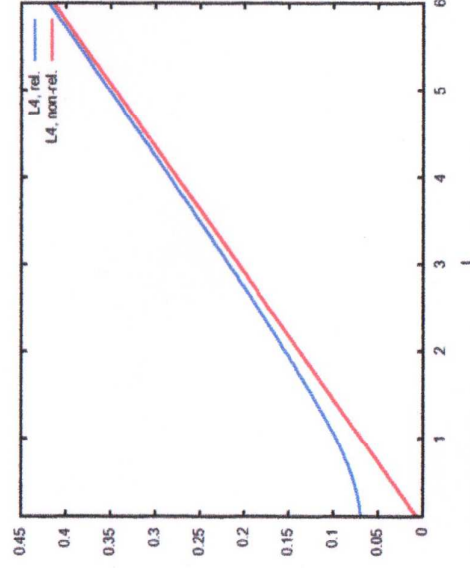


Figura 6: Dependencia temporal del radio  $r(t)$  para la espiral hiperbólica en el caso relativista y no relativista.

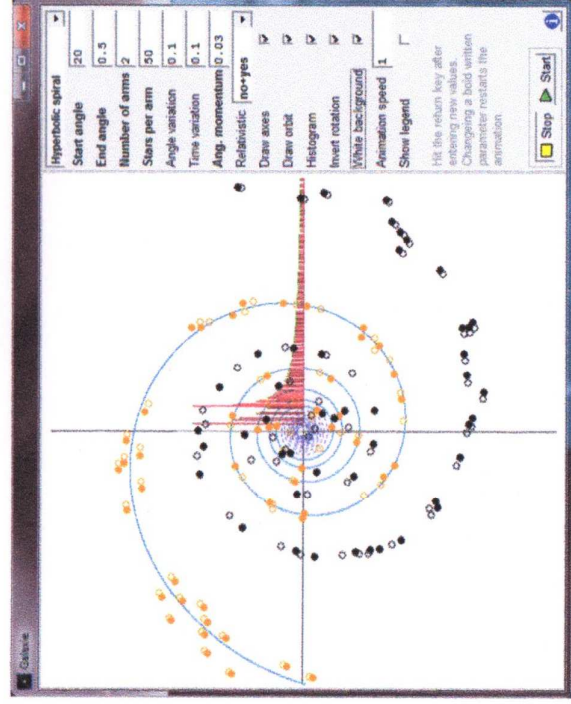


Figura 7: Imagen instantánea del programa de animación para espirales hiperbólicas.



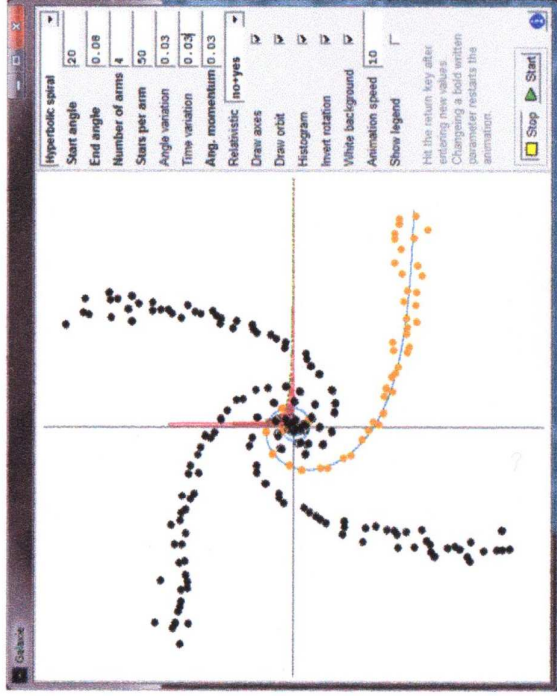


Figura 8: Otra imagen instantánea del programa de animación para espirales hiperbólicas.

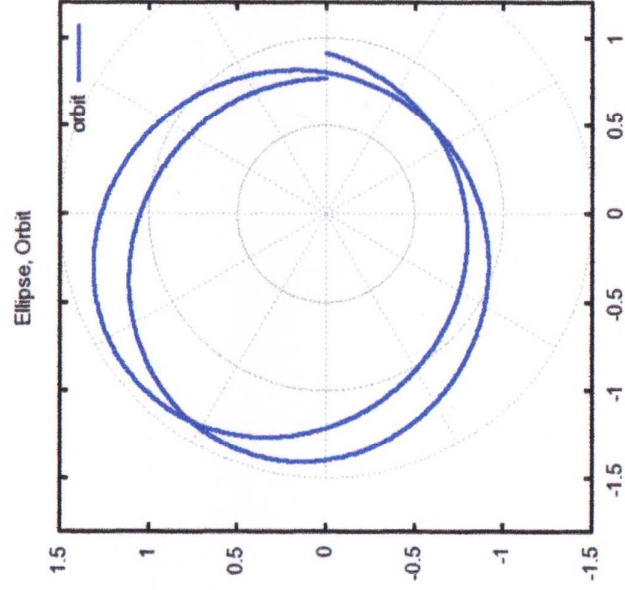


Figura 9: Órbita de una elipse con precesión con  $x = 1.1$

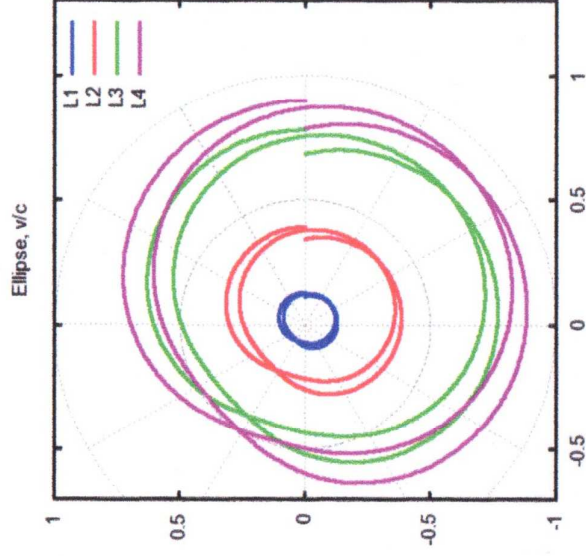


Figura 10: Relación  $v/c$  para la elipse con precesión para varios valores de momento angular.

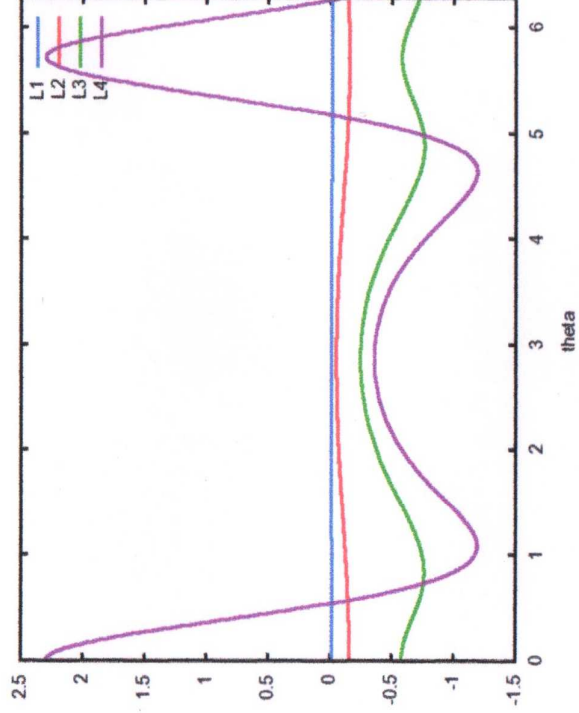


Figura 11: Componente radial de la fuerza de la elipse con precesión, en coordenadas cartesianas.

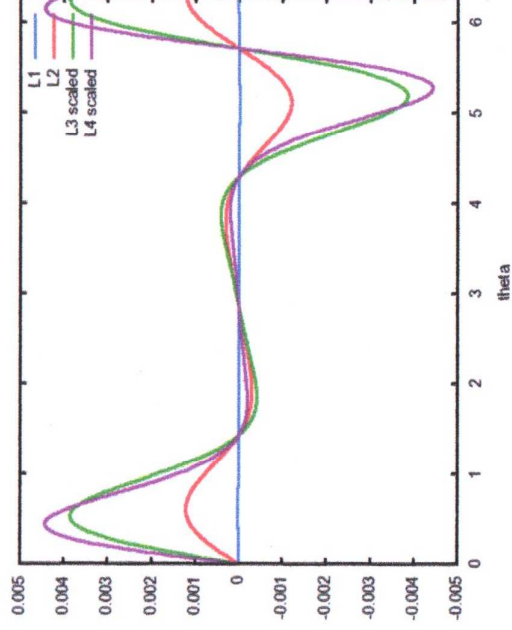


Figura 12: Componente angular de la fuerza de la elipse con precesión, en coordenadas cartesianas.

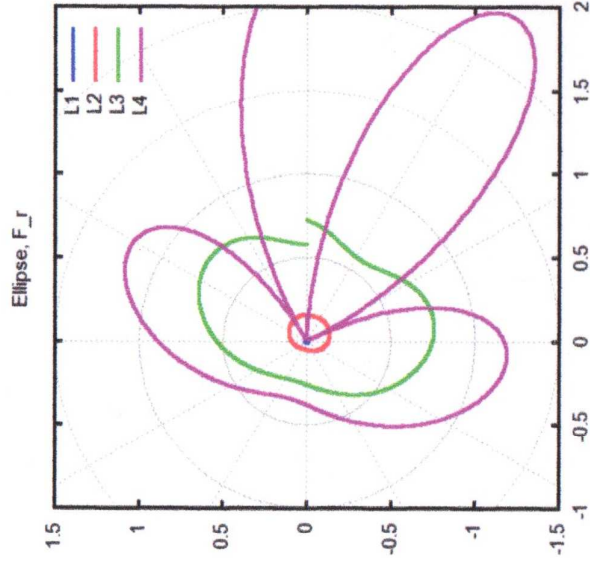


Figura 13: Componente radial de la fuerza de la elipse con precesión, en coordenadas polares.

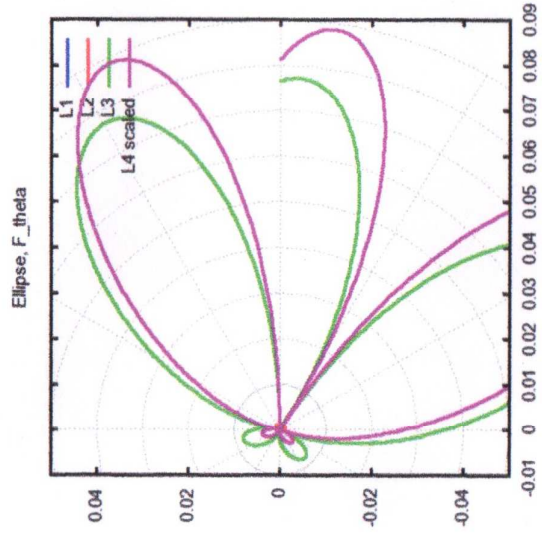


Figura 14: Componente angular de la fuerza de la elipse con precesión, en coordenadas polares.

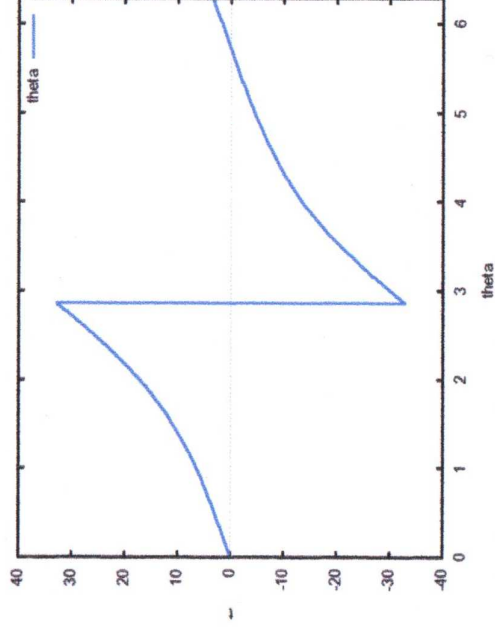


Figura 15: Dependencia temporal angular  $\theta(\theta)$  no relativista de la elipse con precesión.

## Agradecimientos.

Se agradece el Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al equipo técnico de AIAS y a otros por las interesantes discusiones. Se agradece a Dave Burleigh por la publicación en red y a Alex Hill y a Robert Cheshire por las traducciones y las grabaciones. AIAS se encuentra establecido en la Ley de Fideicomisos de Inglaterra y Gales bajo el Fideicomiso de la Familia Newlands (est. 2012). Se encuentra relacionado con UPITEC, que es una organización sin fines de lucro establecida en Boise, Idaho, en los Estados Unidos de América.

## Referencias.

- [1] M. W. Evans, Ed. "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (Cambridge International Science Publishing, CISP, [www.cisp-publishing.com](http://www.cisp-publishing.com), 2012, publicación especial número seis de la ref. (2)).
- [2] M. W. Evans, Ed., Journal of Foundations of Physics and Chemistry (CISP a partir del mes de junio de 2011, seis ejemplares publicados al año).
- [3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (CISP, 2011).
- [4] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis, 2005 a 2011) en siete volúmenes.
- [5] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis 2007, traducido al castellano por Alex Hill on en la Sección en Español del portal [www.aias.us](http://www.aias.us)).
- [6] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, documentos y sesión plenaria en la Academia de Ciencias de Serbia. También en la publicación Foundations of Physics Letters y Physica B.
- [7] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific 2001).
- [8] M. W. Evans y S. Kielich, Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997 y 2001) en seis volúmenes y dos ediciones.
- [9] M. W. Evans y J.-P. Vigiér, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, Dordrecht, 1994 a 2002), en 10 volúmenes con encuadernación dura y blanda.
- [10] M. W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagnetron in Quantum Field Theory" (World Scientific 1994).
- [11] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics" (Harcourt, 3ª. Edición, 1988).
- [12] Retroalimentación a los portales de la teoría ECE que indican treinta millones de lecturas durante la pasada década, así como los datos de retroalimentación en archivos.