

Teoría General y Clasificación de Órbitas Tridimensionales.

por

M. W. Evans y H. Eckardt

(www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.atomicprecision.com, www.upitec.org,
www.et3m.net).

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se desarrolla la teoría general de órbitas tridimensionales para cualquier potencial de atracción entre una masa m en órbita y una masa atractiva M . En general, cualquier órbita tridimensional puede construirse a partir de la sección cónica beta, y clasificarse en términos de su elipticidad. En representación cartesiana hay dieciséis clases de órbitas que representan secciones cónicas tridimensionales. La teoría se ilustra con la galaxia en espiral tridimensional, y se desarrollan para la animación de órbitas tridimensionales.

Palabras clave: teoría ECE, órbitas tridimensionales, teoría general y clasificación.

1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie [1-10] se ha desarrollado la teoría de órbitas tridimensionales, mediante el reemplazo de coordenadas polares planas con coordenadas polares esféricas en la energía cinética. Este procedimiento ha dado como resultado una gran cantidad de resultados novedosos en el campo de la astronomía. En general, el hamiltoniano puede representarse por la sección cónica beta, donde beta se define en términos de los ángulos φ y θ del sistema de coordenadas polares esféricas. Existen cuatro funciones orbitales en general, r puede ser una función de beta, $theta$, phi y una combinación tridimensional de $theta$ y phi . En la teoría orbital bidimensional, r es una función sólo de phi . En tres dimensiones hay más de un momento angular conservado. El momento angular total L se conserva, y se conserva también la componente L_z . En teoría orbital bidimensional, sólo se conserva la componente L_z . Una órbita tridimensional $r(\varphi, \theta)$ siempre puede construirse a partir de cualquier potencial de atracción $U(r)$, de manera que en general r es una función tanto de φ como de θ . En teoría orbital bidimensional r sólo es una función de φ . Para una ley de atracción del cuadrado de la inversa entre la masa m en órbita y una masa central M , las órbitas tridimensionales pueden deducirse a partir de una sección cónica en β para varias elipticidades diferentes. En representación cartesiana se muestra en la Sección 2 que hay dieciséis clasificaciones de órbitas tridimensionales en general, equivalentes a las secciones cónicas tridimensionales.

En la Sección 2 se describe la teoría general de órbitas tridimensionales para cualquier potencial de atracción $U(r)$ y se ilustra la teoría mediante la espiral hiperbólica y las órbitas en espiral logarítmica en tres dimensiones, las cuales constituyen ejemplos de órbitas generadas mediante diferentes tipos de leyes de atracción del cubo de la inversa. La ley de atracción del cuadrado de la inversa aplicada en tres dimensiones da como resultado una sección cónica beta tridimensional. Se demuestra que hay dieciséis representaciones cartesianas fundamentales de la sección cónica beta en representación polar. Se incluyen ecuaciones para la animación de órbitas tridimensionales.

En la Sección 3 se analiza y representa gráficamente la galaxia en espiral tridimensional.

2. Teoría General y Clasificaciones.

Consideremos el hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} m v^2 + U(r) \quad (1)$$

y el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - U(r) \quad (2)$$

donde U es cualquier función de r . La solución de la Ec.(1) es:

$$\frac{1}{r} = f(\beta) \quad (3)$$

donde f es cualquier función de β . La ley de fuerza equivalente a la Ec. (1) es:

$$F(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left(\frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \quad (4)$$

donde:

$$m\ddot{r} = -\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (5)$$

La transición de teoría orbital 2D a 3D se lleva a cabo a través de una transición en la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (6)$$

La energía potencial permanece igual en 2D y en 3D. En 2D:

$$v^2 = \dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \quad (7)$$

y en 3D:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\beta}^2 \quad (8)$$

donde:

$$\dot{\beta}^2 = \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta. \quad (9)$$

Las Ecs. (7) a (9) conducen a [1-10]:

$$\tan \varphi = \frac{L_z}{L} \tan \beta \quad (10)$$

y

$$\cos \vartheta = \left(1 - \left(\frac{L_z}{L} \right)^2 \right)^{1/2} \sin \beta. \quad (11)$$

es decir

$$\cos \beta = \frac{\cos \varphi}{\left(\cos^2 \varphi + \left(\frac{L_z}{L} \right)^2 \sin^2 \varphi \right)^{1/2}} \quad (12)$$

y

$$\cos \beta = \left(1 - \left(\frac{1 - \left(\frac{L_z}{L} \right)^2}{1 - \left(\frac{L_z}{L} \right)^2} \right) \cos^2 \theta \right)^{1/2} \quad (13)$$

En general, la órbita tridimensional viene dada por la Ec. (3) con β definida por la Ec. (12). Por lo tanto, r puede expresarse en términos de φ , en términos de θ , y como una combinación de ambos al sumar las Ecs. (12) y (13) para dar:

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \varphi}{\left(\cos^2 \varphi + \left(\frac{L_z}{L} \right)^2 \sin^2 \varphi \right)^{1/2}} + \left(1 - \left(\frac{1 - \left(\frac{L_z}{L} \right)^2}{1 - \left(\frac{L_z}{L} \right)^2} \right) \cos^2 \theta \right)^{1/2} \right] \quad (14)$$

la Ec. (14) da una órbita $r(\varphi, \theta)$ para cualquier valor de β y cualquier ley de fuerza o potencial $U(r)$.

Por ejemplo, si la energía potencial es:

$$U(r) = -\frac{L^2}{2m} (1 + \gamma^2) \frac{1}{r^2} \quad (15)$$

donde γ es una constante, la ley de fuerza es el cubo de la inversa:

$$F(r) = -\frac{L^2}{m r^3} (1 + \gamma^2). \quad (16)$$

la Ec. (16) da la órbita beta como espiral logarítmica:

$$r = r_0 \exp(\gamma \beta). \quad (17)$$

El lagrangiano (2) da [1-10]:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{L}{m r^2} \quad (18)$$

Esta ecuación da la dependencia respecto de t de β :

$$\beta(t) = \frac{1}{2\gamma} \log_e \left(\frac{2\gamma L t}{m r_0^2} \right) \quad (19)$$

y de r :

$$r(t) = \left(\frac{2\gamma L t}{m} \right)^{1/2} \quad (20)$$

Por lo tanto, a partir de las Ecs. (10) y (11):

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{L z}{L} \tan \beta(t) \right) \quad (21)$$

$$\theta(t) = \cos^{-1} \left(\left(1 - \left(\frac{L z}{L} \right)^2 \right)^{1/2} \sin \beta(t) \right) \quad (22)$$

La dependencia temporal tridimensional de la órbita se obtiene a partir de las Ecs. (14), (21) y (22).

La espiral hiperbólica tridimensional se define mediante:

$$r = \frac{r_0}{\beta} \quad (23)$$

de manera que la dependencia temporal de β en este caso es:

$$\beta(t) = -\frac{m r_0^2}{L t} \quad (24)$$

y la de r es:

$$r(t) = -\frac{L}{m r_0} t \quad (25)$$

A partir de las Ecs. (23) y (10), r puede expresarse en términos de φ :

$$r = \frac{r_0}{\tan^{-1} \left(\frac{L z}{L} \tan \varphi \right)} \quad (26)$$

y a partir de las Ecs. (23) y (11) r puede expresarse en términos de θ :

$$r = \frac{r_0}{\operatorname{sen}^{-1} \left(1 - \left(\frac{L^2}{L^2} \right)^{2-1/2} \right) \cos \theta} \quad (27)$$

Por lo tanto, en general r es una función tridimensional de φ y θ :

$$r = \frac{1}{2} r_0 \left[\frac{1}{\tan^{-1} \left(\frac{L}{L_2} \right) \tan \varphi} + \frac{1}{\operatorname{sen}^{-1} \left(1 - \left(\frac{L^2}{L^2} \right)^{2-1/2} \right) \cos \theta} \right] \quad (28)$$

Para una ley de atracción del cuadrado de la inversa:

$$F(r) = -\frac{mMG}{r^2} \quad (29)$$

donde G es la constante de Newton, la órbita tridimensional resultante es la sección cónica beta:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \beta} \quad (30)$$

donde α es la semi magnitud recta y ϵ es la excentricidad. La dependencia de β respecto de t viene dada por:

$$t = \frac{m\alpha^2}{L} \int \frac{d\beta}{(1 + \epsilon \cos \beta)^2} \quad (31)$$

donde el tiempo requerido para completar una órbita es:

$$T = 2\pi \left(\frac{m\alpha^2}{L} \right) \quad (32)$$

Por lo tanto:

$$t = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\beta} \frac{d\beta}{(1 + \epsilon \cos \beta)^2}$$

$$t = \frac{\tau}{2\pi} \left[2 \tan^{-1} \left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \right)^{1/2} \tan \frac{\beta}{2} - \frac{\epsilon(1-\epsilon^2)^{1/2} \sin \beta}{1+\epsilon \cos \beta} \right] \quad (33)$$

Para valores pequeños de elipticidad ϵ esto puede invertirse para dar:

$$\rho(t) = 2\pi \frac{t}{\tau} + 2\epsilon \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) + \frac{5}{4} \epsilon^2 \sin\left(4\pi \frac{t}{\tau}\right) + \dots \\ + \frac{\epsilon^3}{12} \left(13 \sin\left(6\pi \frac{t}{\tau}\right) - 3 \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right)\right) + \dots \quad (34)$$

Sin embargo, el método tradicional utilizado en la construcción de Kepler [11],

que da:

$$t = \frac{\tau}{2\pi} (\psi - \epsilon \sin \psi) \quad (35)$$

donde:

$$\tan \frac{\beta}{2} = \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{1/2} \tan \frac{\psi}{2}. \quad (36)$$

La cantidad $2\pi t/\tau$ es la anomalía media. Habiendo hallado $\beta(t)$, pueden utilizarse las Ecs. (10) y (11) para encontrar $\varphi(t)$ y $\theta(t)$, y finalmente puede utilizarse la Ec. (30) para encontrar la función tridimensional $r(t) = f(\theta(t), \varphi(t))$. Para el círculo:

$$\epsilon = 0, \quad (37)$$

$$r = \alpha, \quad (38)$$

de manera que:

$$\beta(t) = 2\pi \frac{t}{\tau} \quad (39)$$

de manera que la dependencia temporal de φ a partir de la Ec. (10) se reduce a:

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{L}{L} \tan \left(\frac{L t}{m \alpha^2} \right) \right). \quad (40)$$

En este caso, las dependencias temporales de $\varphi(t)$ y $\theta(t)$ son analíticas:

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{L}{L} \tan \left(2\pi \frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (41)$$

$$\vartheta(t) = \cos^{-1} \left(\left(1 - \left(\frac{t^2}{L^2} \right)^2 \right)^{1/2} \right) \sin \left(2\pi \frac{t}{L} \right)$$

y

La dependencia temporal global de r se obtiene a partir de la conservación del momento angular:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{L}{m r^2}$$

y la dependencia temporal de β .

Las ecuaciones polares consideradas más arriba se suplementan mediante un análisis cartesiano y una clasificación como sigue, una clasificación que permite una comparación directa con los resultados obtenidos a partir de la geometría sólida, una parte de la geometría de Cartan sobre la que se basa la teoría ECE. Las representaciones cartesianas surgen todas a partir de la sección cónica beta:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \beta}$$

en representación polar. Esta sección cónica es equivalente al hamiltoniano (1) y al lagrangiano (2) con una ley de fuerza de atracción del cuadrado de la inversa:

$$F(r) = -mMG/r^2$$

1) Elipse Beta

La representación cartesiana de la elipse beta con una masa atractiva M en un foco de la elipse es:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

y

$$Z^2 = \left(1 - \frac{t^2}{L^2} \right)^2 Y^2$$

con

$$Z = - \left(1 - \frac{t^2}{L^2} \right) Y$$

Aquí:

$$X = a\epsilon + r \cos \beta \quad (49)$$

$$Y = r \sin \beta \quad (50)$$

$$Z = r \cos \theta \quad (51)$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente. La elipticidad de la elipse es:

$$0 < \epsilon^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) < 1 \quad (52)$$

y su semi latitud recta o semi latus rectum, es

$$r = a(1 - \epsilon^2). \quad (53)$$

2) Hipérbola Beta

En este caso:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (54)$$

$$Z^2 = \left(1 - \frac{b^2}{L^2}\right)^2 Y^2 \quad (55)$$

donde:

$$X = -a\epsilon + r \cos \beta \quad (56)$$

$$Y = r \sin \beta \quad (57)$$

$$Z = r \cos \theta \quad (58)$$

La elipticidad es:

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 1 \quad (59)$$

y la semi latitud recta es:

$$r = a(\epsilon^2 - 1). \quad (60)$$

3) Parábola Beta

Aquí:

$$Y^2 = 4aX \quad (61)$$

$$Z^2 = \left(1 - \frac{Y^2}{L^2}\right)^2 Y^2 \quad (62)$$

y la elipticidad es igual a la unidad:

$$\epsilon = 1 \quad (63)$$

4) Círculo Beta

Aquí:

$$X^2 + Y^2 = r^2 \quad (64)$$

$$Z^2 = \left(1 - \frac{Y^2}{L^2}\right)^2 Y^2 \quad (65)$$

y la elipticidad es igual a cero:

$$\epsilon = 0 \quad (66)$$

$$r = a = b \quad (67)$$

$$X = r \cos \beta \quad (68)$$

$$Y = r \sin \beta \quad (69)$$

$$Z = r \cos \phi \quad (70)$$

Utilizando estas ecuaciones puede llevarse a cabo una clasificación cartesiana de órbitas tridimensionales en dieciséis tipos fundamentales, como sigue.

Elipse

Tipo (1) : Elipsoide

$$\frac{X^2}{a^2} + Y^2 + Z^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{Y^2}{L^2}\right) \right) + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad (71)$$

Tipo (2): Hiperboloide de una Hoja

$$\frac{X^2}{a^2} + Y^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \right) - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

(72)

Tipo (3): Paraboloide Elíptico

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z}{c} = 1 + \frac{Y}{c} \left(1 - \frac{L^2}{L^2} \right)$$

(73)

Tipo (4): Paraboloide Elíptico

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z}{c} = 1 - \frac{Y}{c} \left(1 - \frac{L^2}{L^2} \right)$$

(74)

Hipérbola

Tipo (5): Hiperboloide de Una Hoja

$$\frac{X^2}{a^2} - Y^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \right) + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

(75)

Tipo (6): Hiperboloide de Dos Hojas

$$\frac{X^2}{a^2} - Y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \right) - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

(76)

Tipo (7): Paraboloide Hiperbólico

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z}{c} = 1 - \left(1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \frac{Y}{c}$$

(77)

Tipo (8): Paraboloide Hiperbólico

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z}{c} = 1 + \left(1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \frac{Y}{c}$$

(78)

Parábola

Tipo (9): Paraboloide Elíptico

$$Y^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \right) + \frac{Z^2}{b^2} = \frac{4X}{a}$$

(79)

Tipo (10): Paraboloide Hiperbólico

$$Y^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{Lz}{L} \right) \right) - \frac{Z^2}{b^2} = \frac{4X}{a} \quad (80)$$

Tipo (11): Paraboloide

$$\frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z}{b} = \frac{4X}{a} - \frac{1}{b} \left(1 - \frac{Lz}{L} \right) Y \quad (81)$$

Tipo (12): Paraboloide

$$\frac{Y^2}{a^2} - \frac{Z}{b} = \frac{4X}{a} + \frac{1}{b} \left(1 - \frac{Lz}{L} \right) Y \quad (82)$$

Círculo

Tipo (13): Elipsoide

$$X^2 + Y^2 \left(1 - \left(1 - \frac{Lz}{L} \right)^2 \right) + Z^2 = r^2 \quad (83)$$

Tipo (14): Hiperboloide de Una Hoja

$$X^2 + Y^2 \left(1 + \left(1 - \frac{Lz}{L} \right)^2 \right) - Z^2 = r^2 \quad (84)$$

Tipo (15): Parábola Elipsoida

$$X^2 + Y^2 + aZ = r^2 - aY \left(1 - \frac{Lz}{L} \right) \quad (85)$$

Tipo (16): Parábola Elipsoida

$$X^2 + Y^2 - aZ = r^2 + aY \left(1 - \frac{Lz}{L} \right) \quad (86)$$

Los tipos (1) a (4) vienen dados por la elipse beta con excentricidad:

$$0 < \epsilon < 1.$$

(87)

Los tipos (5) a (8) vienen dados por la hipérbola beta con excentricidad:

$$\epsilon > 1.$$

(88)

Los tipos (9) a (12) vienen dados por la parábola beta con excentricidad:

$$\epsilon = 1.$$

(89)

Los tipos (13) a (16) tienen dados por el círculo beta con excentricidad:

$$\epsilon = 0.$$

(90)

3. Análisis Gráfico.

La evolución temporal de las órbitas en el espacio se ha representado gráficamente en esta sección para espirales hiperbólicas y exponenciales. Éstas son órbitas planas descritas por las Ecs.(17) y (44). Las evoluciones temporales se describen a través de las Ecs.(19-22) y (39-42), respectivamente. La órbita de la espiral hiperbólica (Fig. 1) siempre se encuentra en un plano. Solamente el plano cambia su dirección con L . Para $L = L_z$ es en el plano XY , para $L_z = 0$ es en el plano XZ , porque entonces el vector del momento angular no posee componente según el eje Z . La evolución temporal no cambia con L_z porque β solamente depende de L , y no de L_z . Los círculos que describen la órbita en la Fig. 1 se generan sobre una malla temporal equidistante, y su distancia es un mapeo de la evolución temporal de una partícula en la órbita. El ángulo azimutal θ oscila fuertemente con el tiempo (ver Fig. 2) porque el plano orbital rota en contra del plano XY . La órbita se encuentra sin duda en un plano, tal como puede observarse cuando se rota el ángulo de vista de la Fig. 1 (no se muestra en una figura).

La evolución temporal de la órbita en espiral exponencial (Fig. 3) se ha representado gráficamente de la misma manera en que se lo hizo para la espiral hiperbólica. La espiral se comporta de una manera más suave cerca del centro debido a la diferente dependencia radial. También, puede observarse aquí que la evolución temporal es más rápida cerca del centro.

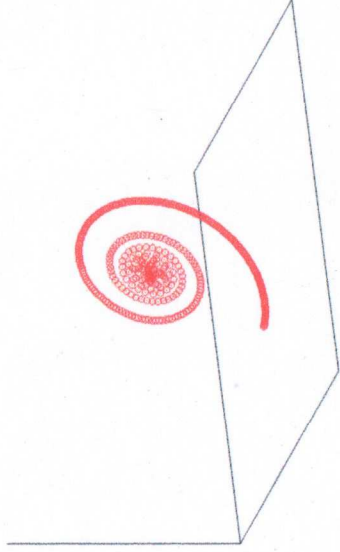


Figura 1: órbita en espiral hiperbólica para $L = 3$; $L_z = 1$.

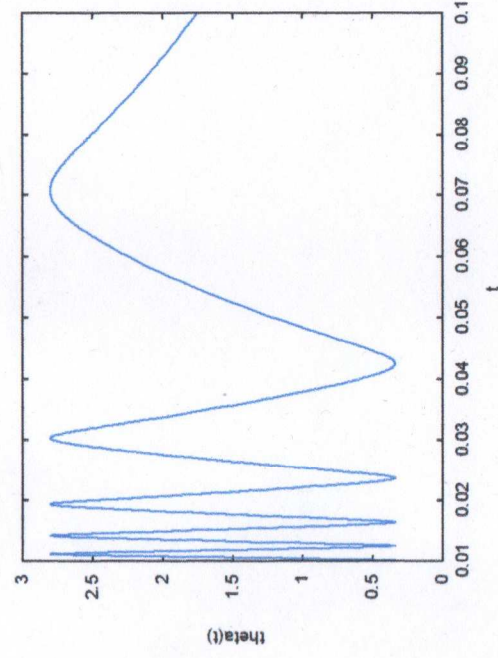


Figura 2: dependencia temporal angular $\theta(t)$.

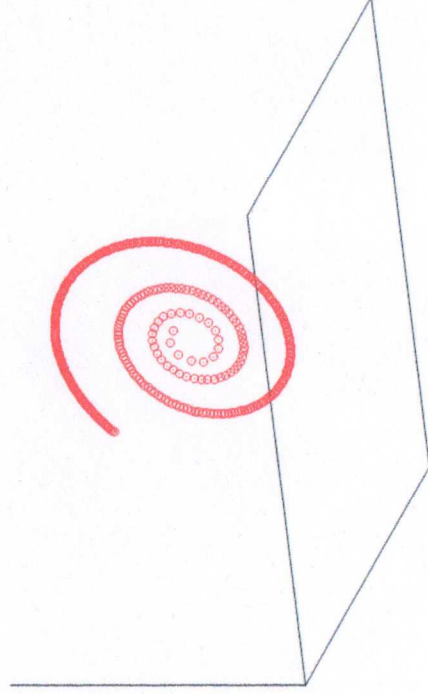


Figura 3: órbita en espiral exponencial para $L = 3$; $L_z = 1$.

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al personal técnico de AIAS y otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por su publicación en red, a Alex Hill por las traducciones y grabaciones en idioma castellano y a Robert Cheshire por las grabaciones en idioma inglés.

Referencias bibliográficas.

- [1] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, "Principles of ECE Theory" (de libre acceso en el portal www.aias.us y en formato de libro, 2014 / 2015).
- [2] M. W. Evans, Ed., "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (Cambridge International Science Publishing, CISP, www.cisp-publishing.com 2012).
- [3] M. W. Evans, Ed., J. Found. Phys. Chem. (CISP y en documentos de libre acceso en el portal www.aias.us).
- [4] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (CISP 2011, de libre acceso en el portal www.aias.us).
- [5] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, 2005- 2011 y de libre acceso como documentos UFT en el portal www.aias.us) en siete volúmenes.
- [6] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory (Abramis Academic 2007 y de libre acceso en el portal www.aias.us . Traducción al castellano por Alex Hill de libre acceso en la Sección en Español del portal www.aias.us).
- [7] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific 2001 y de libre acceso en el portal www.aias.us).
- [8] M. W. Evans y S. Kielich, Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001 al presente) en dos ediciones y seis volúmenes.
- [9] M. W. Evans y J.-P. Vigié, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, Dordrecht, 1994- 2002) en diez volúmenes, con encuadernación dura y blanda.
- [10] M.W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagnetron in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).
- [11] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics of Particles and Systems" (Harcourt College Publishing, Nueva York, 1988, tercera edición).